逆三角関数に慣れるための例題：

１． $\arctan(-\sqrt{3})$の値を求めよ。

２． $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$の値を求めよ。

３． $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, (-1 \leq x \leq 1)$ を示せ。

４． $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (-1 \leq x \leq 1)$を示せ。

５． $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$を示せ。

６． $\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$， $(-1 < x < 1)$を示せ。

答えは次のページです。

解説

１．　arctan$(-\sqrt{3})$の値を求めよ。

答えは、タンジェントの値が$-\sqrt{3}$となる角である。タンジェントが周期πの周期関数だからそのような角は無限にあるのだが、そのうちで$-\frac{\pi}{2}$から$\frac{\pi}{2}$の間にあるもの（主値）を選ぶ（主分岐をとる：教科書 p.24～25 参照）。こうして

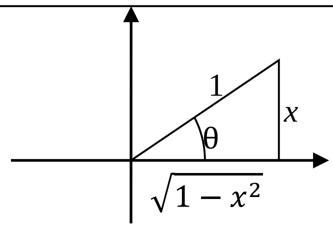
$$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

２．　arcsin$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$の値を求めよ。

答えは、サインの値が$\cos\frac{\pi}{6}$と等しくなる角度である。$\frac{\pi}{6}$の補角は$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$（30°の補角は 60°）だから、$\cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}$である。したがって

$$\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

３．　$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, (-1 \le x \le 1)$ を示せ。



$x = \sin\theta,\ \theta = \arcsin x$

$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta = \cos(\arcsin x)$

斜辺の長さが 1 の直角三角形の底辺の長さが$\sqrt{1-x^2}$のとき、高さがxである。ただし、負のxは下向きの三角形をあらわす。また、高さは斜辺より長くはならいので、$-1 \le x \le 1$である。

図のように角θをとると

$$x = \sin\theta \qquad (1)\quad ①$$

および

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta \qquad (2)$$

ここで(1)の関係を

$$\theta = \arcsin x \qquad (3)$$

と書き直して(2)に代入すると

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

であり題意が示される。

４．　**$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (-1 \le x \le 1)$を示せ。**

斜辺が１の直角三角形の直角でない角をθおよびϕとすると（直角三角形だから）$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$、言い換えると$\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$である。ここで

$$x = \sin\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

であるから

$$\phi = \arcsin x, \quad \theta = \arccos x$$

よって

$$\phi + \theta = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

となる。もっとも、こんなことを言うまでもなく、三角形の絵を描いて角度を逆関数を使って書き込めばすぐわかるはず。

５．　**$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$を示せ。**

タンジェントの加法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

において、$\alpha = \arctan\frac{1}{2}, \beta = \arctan\frac{1}{3}$とおくと、

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right) + \tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1 - \tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}$$

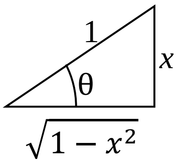
$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

と計算できる。タンジェントの値が１となる角は$\frac{\pi}{4}$であるから、

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

以上で題意が示された。

６．$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$(-1 < x < 1)$を示せ。



右図において

$$\sin\theta = x, \quad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}, \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

の関係がある。これらを逆三角関数で表すと

$$\theta = \arcsin x, \quad \theta = \arccos\sqrt{1-x^2}, \quad \theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

両端の式から題意が示される。