# 関数の極限

# 極限の記号

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$: 右（から近づく）極限

$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$: 左(から近づく)極限

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \begin{cases} = f(a) \\ \neq f(a) \end{cases}$$

# 有名な極限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{x}\,,\qquad \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \log\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{t-1}{\log t} = \frac{s}{\log(1+s)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \;\to\; \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \;\to\; \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \cdots$$

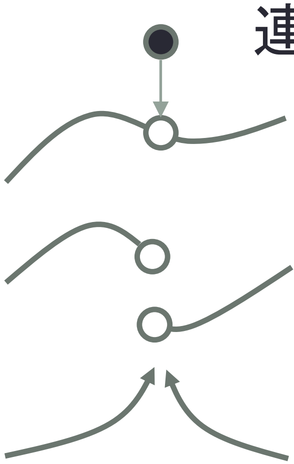
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \;\to\; \frac{e^x-1}{x} = 1 + \cdots$$

# $f(x)$ が 連続

## グラフがひとふで描きできる関数

$x=a$で連続　：　$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{\text{存在}} = \underbrace{f(a)}_{\text{存在}}$

区間$I$で連続　：　$I$の各点で連続



連続でないとき不連続という

- ある点で関数値が存在しない
  - 左右極限が一致する（除去できる不連続点）
  - 〃　　　　一致しない
    - 発散する
    - 左極限と右極限が不一致
- いたるところで不連続　例：xが有理数のとき1，他は0

# 連続関数の中間値の定理

- 区間の両端で関数値の符号が異なるとき,
  区間内で0となる点が必ず存在する.