Q.「全微分」と「微分」の違いはありますか？

A.「全微分」は，変数が 2 個以上（ならばいくつでも可）の場合に限る用語.「微分」というときは変数が 1 個の場合も含めて用いる用語. これ以外に両者の本質的な差はない. したがって記号も同じdfという書き方をする. いずれも，関数値の微小な変化分を意味する.「微小」とは「その変化分の原因となった変数の変化」に比例するとみなせるほど小さい，という意味である．1 変数の直線，2 変数の平面，それ以上の変数の超平面の場合以外は，有限の変化では実現されないが無限に小さな変化ならば実現される（という種類の関数を微分できる関数という).

Q. 「接平面」の定義がわかりません.

A. まず,「接線」の復習：ある曲線の接線は，その曲線上の 2 点をとおる直線を描き，2 点をかぎりなく接近させるときの極限として与えられる．2 点のうちの片方を固定し他方を動かすとき，他方の点を固定した点の左側にとっても右側にとっても極限をとると同じ接線になることと，この関数が微分可能であることは同等である.

つぎに，2 変数関数のグラフとして与えられる曲面上に 1 点をとり，その点のxy座標を(a,b)とする．xy平面上で点(a,b)をとおる直線（向き＝傾きは，なんでもよい）を考える．この直線上を移動しながら対応する関数値の変化を観察すると曲線になり，関数がなめらかなら接線を引くことができる．直線の向きを変えて接線を引くとき，微分できる 2 変数関数であれば，すべての接線が 1 つの平面にのる．この平面を「接平面」という.

接平面をもつ 2 変数関数に対しては，x軸方向の接線と y 軸方向の接線がのる平面が「接平面」と一致する．こうして

$$z = f(x, y)$$

の(a,b)における接平面は

$$\mathrm{z} = f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-a) + f(a,b)$$

である.

Q. $f_{xy} = f_{yx}$となる条件が理解できませんでした.

A. 「f_{xy}とf_{yx}がともに連続ならば，$f_{xy} = f_{yx}$となる」

●記号

f_{xy}はfを x で偏微分して得た偏導関数をさらに y で偏微分した 2 階偏導関数のこと．f_{yx}は，y で偏微分したあとでさらに x で偏微分したもの.

●命題の証明には平均値の定理を用いる.

xの区間$[a,b]$で連続な$g(x)$が(a,b)で滑らか（すなわち，微分係数$g'(x)$が区間内で連続）なとき,

$$g(b) - g(a) = (b-a)\,g'(c)$$

となる c（ただし$a < c < b$）が存在する．同じことを

$$g(b) - g(a) = (b-a)\,g'(a + \theta(b-a))$$

となるθ (ただし$0 < \theta < 1$)が存在する，と言い換えてもよい.

(1) $f(x,y)$から次のようにしてxだけの関数$\phi(x)$をつくる：

$$\phi(x) \equiv f(x, b+k) - f(x, b)$$

この関数は, y座標がkだけ異なる 2 点$(x, b+k)$と(x,b)の間の高さの差である（この差はx座標により変化する).

$\phi(x)$がx座標によって変化する様子は微分係数$\frac{d\phi}{dx}$で表せる．ところで，ϕをxで微分することは，fをxで微分する

ことだが，fは2つの変数を持つ関数だからxによる偏微分係数を用いて表す必要がある（この論旨からして，当然fのxに関する1階偏導関数が存在することを仮定している）：

$$\frac{d\phi}{dx} = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$$

(2) $\frac{d\phi}{dx}$がxの区間$(a, a+h)$で連続(したがってf_xが連続)のとき，平均値の定理によれば

$$\phi(a+h) - \phi(a) = h\,\phi'(a+\theta h)$$

となるθ（ただし$0 < \theta < 1$)が存在する．右辺をf_xを用いて書き直す：

$$\phi(a+h) - \phi(a) = h\,\{f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\}$$

である．

(3) 右辺の変数yの部分に注目すると，yの区間$[b, b+k]$について平均値の定理を適用できる形になっている．

f_xのyに関する偏導関数f_{xy}が連続なとき

$$\phi(a+h) - \phi(a) = f(a+h, b+k) - f(a, b) = hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$$

となるθ'（ただし$0 < \theta' < 1$)が存在する．

(4) 両辺を$h \times k$で割り$h \to 0, k \to 0$の極限をとると

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b)}{hk} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) = f_{xy}(a, b) \cdots (*)$$

となることが分かった（偏導関数f_{xy}が連続という条件が必要だった）．

(5) 次に，x と y の役割を入れ替えて，最初から同様に議論を展開すると，

$$\psi(y) \equiv f(a+h, y) - f(a, y) \to \frac{d\psi}{dy} = f_y(a+h, y) - f_y(a, y)$$

$$\psi(b+k) - \psi(b) = k\,\psi'(b+\theta' k) = k\left\{f_y(a+h, b+\theta' k) - f_y(a, b+\theta' k)\right\} = hkf_{yx}(a+\theta h, b+\theta' k)$$

ここで

$$\psi(b+k) - \psi(b) = f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

となることに注意すると，

偏導関数f_{yx}が連続という条件のもとで

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b)}{kh} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{yx}(a+\theta h, b+\theta' k) = f_{yx}(a, b) \cdots (**)$$

式(*)と(**)の左辺が同じだから，偏導関数f_{xy}とf_{yx}が連続という条件のもとで　$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$　となった．

● $f_{xy} \neq f_{yx}$となる例

(1) $f(x, y) = |x|$

原点で1階偏導関数が不連続なために，$f_{xy} \neq f_{yx}$となる．

$$f_x = \text{存在せず} \cdots (x=0),\quad f_x = \pm 1 \cdots \left(\text{複合：} x > 0, x < 0\right)$$

$$f_{xy} = \text{存在せず} \cdots (x=0),\quad f_{xy} = 0 \cdots (x \neq 0)$$

$$f_y = 0$$

$$f_{yx} = 0$$

(2) $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$(原点を除く), $f(0,0) = 0$

1階偏導関数まで滑らかな$f(x, y)$だが，原点で2階偏導関数が不連続となる．2階偏導関数は原点以外では連続である．

$$f(x, 0) = 0, \qquad f(0, y) = 0$$

$$f_x(0,0) = \left[\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right] = 0,\ \ f_y(0,0) = 0$$

原点以外で

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

したがって，1 階偏導関数は原点でも連続でなめらか.

これに対し，2 階偏導関数の原点における振る舞い：

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{-h^5}{h^4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{h^5}{h^4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}(1) = 1$$

Q. arctan が微分できません

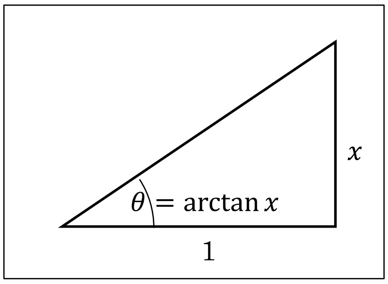
A.

●**定義**：$\arctan x$は$\tan^{-1} x$と書くこともあるが，tan の逆関数である：

・$\tan(\arctan x) = x$，$\arctan(\tan x) = x$

・タンジェントの値がxとなるような角を $\arctan x$ と書く．タンジェントが周期関数なので，そういう角はたくさんあるが，通常は$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$となるように約束する（主値).

・教科書 p.24 の図を参照せよ．主値に対する教科書の定義は$-\frac{\pi}{2} \le \arctan x \le \frac{\pi}{2}$と等号が入るが，両端は$x$の値が無限大となるので，等号を含めないのが普通である．だが，等号があってもなくても誤りが発生することはないので，神経を使う必要もない.



・$\arctan 0 = 0$，$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

・$\arctan(-x) = -\arctan x$：奇関数

●導関数：

◆逆関数の微分法（教科書 p.49 (9)を参照）

$f(x)$の逆関数を$g(x)$と書く．ここでは，合成関数の微分法を利用して説明する：

逆関数の定義を合成関数の記号で書くと$f\big(g(x)\big) = x$

両辺をxで微分する：

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)\frac{dg}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$f'\big(g(x)\big)$という記号は，「$f(x)$をxで微分した結果のxに$g(x)$を代入する」という意味である.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

◆ $f(x) = \tan x$，$g(x) = \arctan x$について：

$$f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (\tan x)^2$$ (2 番目の等号は，両辺に$\cos^2\theta$ をかけて確かめよ)

を用いると

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 g(x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

◆ arctan の変数がxではなく関数$u(x)$のとき，合成関数の微分法から

$$\frac{\mathrm{d}\arctan\left(u(x)\right)}{dx}=\frac{d\arctan u}{du}\frac{du}{dx}$$

例 $\frac{d}{dx}\arctan(ax)=\frac{1}{1+(ax)^2}\times a=\frac{a}{a^2x^2+1}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{x^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2}$

例 $\frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}y\right)^2}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}y\right)^2}\times\frac{x}{x^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$

例 $\frac{d}{dx}\arctan(2x-3)=\frac{1}{1+(2x-3)^2}\times 2=\frac{2}{(2x-3)^2+1}$

例 $\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\times\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2+1}$

例 $\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$

例 $d\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\}dx+\left\{\frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\}dy=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{y^2+x^2}dy=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

問題 5-3[1](4)

Q. $\tan\theta=\frac{y}{x}$からどうやって導関数を導いてるのかわかりません. $\frac{\partial\theta}{\partial x}$と$\frac{\partial\theta}{\partial y}$はどのように導けばよいのでしょうか.

A. 「導関数」ではなく θ の微分すなわち dθ を求めるのが題意である．この問では$\theta=\arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$となっているので，$x$と$y$の関数である$\theta(x,y)$の全微分を求める．それは $\arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$の偏微分係数を求める計算にほかならないが，それはすぐ上の Q&A に記したものである．

一方，この質問者の式$\tan\theta=\frac{y}{x}$から dθ を求めることもできる：

まず，$\tan\theta$の微分 $d\tan\theta$ と$\frac{y}{x}$ の微分$d\left(\frac{y}{x}\right)$が等しい：$d\left(\frac{y}{x}\right)=d\tan\theta$.

そこで，$d\tan\theta$を$d\theta$によって表す：

$$d\tan\theta=\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}=(1+\tan^2\theta)d\theta=\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)d\theta\cdots(*)$$

つぎに，$d\left(\frac{y}{x}\right)$を$dx$と$dy$によって表す：

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)dy=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$$

両式から

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)d\theta=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$$

よって

$$d\theta=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

この式と，形式的な全微分の式

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy$$

を比較すると

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

を得る．

問題 5-3 {3}(3)

Q. 巻末の解答に$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$とありますが，この式を理解できませんでした．$d$と$\partial$が混在していてわからなくなりました．

A. $u=t^2+2tx+3x^2$と与えられているので$u(t,x)$である．ここで$x(t)=\log t$ という関係を用い$u\big(t,x(t)\big)=u(t)$とするとき$\frac{du(t)}{dt}$を$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$と$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$で表すことができる．$\frac{du}{dt}$と記せば($d$となっているので)1 変数関数$u(t)$の微分係数$\frac{du(t)}{dt}$に他ならない．また$\frac{\partial u}{\partial x}$と記せば($\partial$となっているので)多(今は 2)変数関数$u(x,t)$の$x$についての偏微分係数に他ならない．したがって「$\frac{du}{dt}$を$\frac{\partial u}{\partial x}$と$\frac{\partial u}{\partial t}$で表すことができる」と書けば十分である．

$u(x,t)$の全微分は，どんな場合でも

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

と書ける（dxとdtの選びかたで，どんな場合のuの微小な変化でも表せる，という意味.）そこで，$x(t)=\log t$にしたがってtとxが変化するとき，言い直すと

$$dx = \frac{1}{t}dt$$

という関係を保ちながらtとxが変化するとき，2 変数関数$u(x,t)$の微小な変化（すなわち全微分）が 1 変数関数$u(t,x(t))=u(t)$の微分と等しくなり

$$du(t) = du\big(x,x(t)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

両辺をdtで割ると

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = (2t+6x)\frac{1}{t} + (2t+2x)$$

Q. 合成関数なので最終結果もすべてtで表すべきだと思いました．

A. 式の最終的な形は

1. 見た目に美しい　(式が意味する幾何学的な関係が明白であるなど)
2. 計算を実行しやすい (数値計算を実行しやすい)

などの観点から決める．諸君はそうするとよい．

この問の略解はいずれでもない状況でストップしている．しかし，略解の表記は合成関数の微分法の練習として，式変形の不可欠な通過点を示す目的で書かれているように思う．実際

$$\frac{du}{dt} = (2t+6\log t)\frac{1}{t} + (2t+2\log t) = 2\left(1+\frac{1}{t}\right)\log t + 2(t+1)$$

の最終形しか略解に書いていないとすると，正しいかもしれないが教科書としては不親切だと思う．教科書という目的（答えの書き方を教えるのではなく，理解してもらうことを目的とする）と限られたページ数の中では，略解の記述を中途半端と非難することはできないように思う．

例題 5-3

Q. 数式ばかりで何をやっているのかわかりません.

A. 数式の間にどんな説明を補うと意味が通じるかいろいろと想像し，その想像を式により確認し，つじつまがあったら理解できたわけである．理系の勉強では，このように数式を読んでいくトレーニングが必要である．以下，具体的な Q に解説を加えながら式を見ていくことにする：

Q. $\frac{dx}{dt}$、$\frac{dy}{dt}$と違い、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$と表記するのは何故ですか.

A.　$u = f(x, y)$は x と y を変数としているので，「x 方向の微分係数」と「y 方向の微分係数」がある．こういう場合に d の代わりに∂と書き$\frac{\partial u}{\partial x}$などを偏微分係数と呼ぶ習慣になっている．

Q. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2$の式はどんな意味を持っているのですか.

A. 左辺は，曲面$u = f(x, y)$の接平面の最大傾斜を表すベクトル$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$の大きさの 2 乗である．すなわち最大傾斜の値の 2 乗である．右辺は，この値を極座標で表したときのもの．ある点を直交座標(x, y)で表すこともできるし極座標(ρ, ϕ)で表すこともできる：同じ位置の別な表現である．同様に，曲面の最大傾斜のベクトルの大きさは座標系により値が異なるが，同じ大きさの別の表現である．

xy 座標系で計算した最大傾斜の 2 乗は$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$であるが，極座標では$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2$とならないで

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2$$

となるところが重要である．

第 2 項の$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2$の幾何学的意味を考える：

半径ρ方向の傾き$\frac{\partial u}{\partial \rho}$は，半径方向に$\Delta\rho$進んだときの高さの変化$\Delta u$を用いた$\frac{\Delta u}{\Delta \rho}$の極限値である．一方，偏角だけが$\Delta\phi$変化するときの移動距離が$\rho\Delta\phi$だから，このときの高さの変化を$\Delta u$とすれば，傾斜は$\frac{\Delta u}{\rho\Delta\theta}$. こうして，$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2$という項が現れる．

Q. $\rho = \frac{x}{\cos\varphi}$より、$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi}$となると思いました.

A. $x = \rho\cos\phi$，　$y = \rho\sin\phi$という座標変換は

$$x(\rho, \phi) = \rho\cos\phi,\quad y(\rho, \phi) = \rho\sin\phi$$

と書き直すように，xとyを極座標の変数ρとϕの関数とすることである．あるいは逆に

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\qquad \phi(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$$

と，極座標の変数ρとϕを直交座標の変数xとyの関数とすることである．こうして，ρをxとy<u>だけで</u>書き直して

から$\frac{\partial \rho}{\partial x}$の計算をする必要がある.

Q. [解]の$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\cdots$のところで、$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$と変形されていることについて、$\rho$が消えているのは何故ですか？

A. 直交座標と極座標の関係$x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$より

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}=1\times\cos\phi=\cos\phi\,,\quad \frac{\partial y}{\partial \rho}=1\times\sin\phi=\sin\phi$$

となるから.

ちなみに

$$\frac{\partial x}{\partial \phi}=\rho\times(-\sin\phi)=-\rho\sin\phi\,,\qquad \frac{\partial x}{\partial \phi}=\rho\times(\cos\phi)=\rho\cos\phi$$

Q. 教科書の式を解説してください.

A. $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$

ということは，原点を共有しx軸を始線とする極座標系 (ρ, ϕ)を導入した.

$u=f(x,y)$と書くとuはxとyの関数だから

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\cdots(**)$$

であるが，(x,y)を(ρ, ϕ)に変換すると u もρとϕの関数となる．このときの偏微分係数が$\frac{\partial u}{\partial \rho},\frac{\partial u}{\partial \phi}$である:

$$du=\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial u}{\partial \phi}d\phi\cdots(*)$$

直交座標と極座標の関係$x(\rho,\phi)=\rho\cos\phi$, $y(\rho,\phi)=\rho\sin\phi$より

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}=1\times\cos\phi=\cos\phi\,,\qquad \frac{\partial x}{\partial \phi}=\rho\times(-\sin\phi)=-\rho\sin\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}=1\times\sin\phi=\sin\phi\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial \phi}=\rho\times(\cos\phi)=\rho\cos\phi$$

したがって

$$dx=\frac{\partial x}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi=\cos\phi\ d\rho-\rho\sin\phi\ d\phi\,,\qquad dy=\frac{\partial y}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi=\sin\phi\ d\rho+\rho\cos\phi\ d\phi$$

となる．この結果を(**)の右辺に代入し，$d\rho$と$d\phi$でまとめると

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}(\cos\phi\ d\rho-\rho\sin\phi\ d\phi)+\frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\ d\rho+\rho\cos\phi\ d\phi)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\phi\right)d\rho+\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\phi+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\phi\right)d\phi$$

$d\rho$と$d\phi$は互いに独立に変化することができるので, (*)と比較すると

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\phi\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\phi+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\phi$$

証明すべき式の右辺にあわせて，各辺を 2 乗する：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\phi\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\phi + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sin^2\phi + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\phi\sin\phi$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2 = \rho^2\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\phi\right)^2 = \rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sin^2\phi + \rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cos^2\phi - 2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\phi\sin\phi$$

よって

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\phi + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sin^2\phi + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sin^2\phi + \rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cos^2\phi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

となる.

演習 [4]

Q.∂←この記号の読み方も意味もわかりません.

A. $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ならば，ラウンド・ディー・u・ディー・ ρ とかパーシャル・ディー・u・ディー・ ρ とか読む．講義は聞いてた？意味は偏微分の微分記号.

Q. $\boldsymbol{\varphi = \arctan\frac{y}{x}}$がどうやって求まったかわかりません.

A. $y = \rho\sin\phi$ を$x = \rho\cos\phi$ で割ると $\frac{y}{x} = \tan\phi$，tan の逆関数が arctan だから，$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(\tan\phi) = \phi$

Q. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$というような変形は，なぜそのように変形しようと考えるのでしょうか.

A. 直交座標系の偏微分係数を，極座標系の変数と偏微分係数で表現しなおすのが目的である.

●1 階偏微分係数$\frac{\partial f}{\partial x}$ならば

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

とすることで$\frac{\partial f}{\partial \rho}$と$\frac{\partial f}{\partial \phi}$という ρ と ϕ だけの表現を導入できた．ここで$\frac{\partial \rho}{\partial x}$と$\frac{\partial \phi}{\partial x}$を ρ と ϕ だけで書くことができたら目的達成となる.

　実際

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}$$

だから，

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \frac{\rho\cos\phi}{\rho} = \cos\phi \cdots (1), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\rho\sin\phi}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho}\sin\phi \cdots (2)$$

こうして

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi \cdots (3)$$

となる.

[4] (3)

● 2 階偏微分係数についても，全く同様のやりかたで ρ と ϕ の関数として表せる：

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$の$f$を$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$に変えると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\boxed{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}\cdots(4)$$

一方，$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi$であるから，(4)の右辺第一項については

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\right)\cdots(5)$$

(5)の右辺第一項は，$\frac{\partial f}{\partial \rho}$が$\rho$と$\phi$の関数であること，$\phi$は$\rho$と独立な変数であり$\frac{\partial}{\partial \rho}\cos\phi=0$となること注意して

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\times\cos\phi+\frac{\partial f}{\partial \rho}\times\frac{\partial}{\partial \rho}\cos\phi=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos\phi\cdots(6)$$

(5)の第二項は

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\sin\phi=\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\frac{\partial f}{\partial \phi}+\frac{1}{\rho}\times\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\sin\phi=\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\partial \phi}\right)\sin\phi$$

$$=-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\partial \phi}\sin\phi\cdots(7)$$

となる.

(4)の右辺第一項は(1)と(6)(7)を用いて

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\partial \phi}\sin\phi\right\}\cos\phi$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho\partial \phi}\sin\phi\cos\phi\cdots(8)$$

(4)の右辺第二項については

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\right)\cdots(5')$$

を計算する．(4)の右辺第一項の計算と同様にして，(5')の第一項は

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\phi\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \phi\partial \rho}\cos\phi-\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\phi\cdots(6')$$

(5')の第二項は

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\sin\phi+\frac{\partial f}{\partial \phi}\cos\phi\right)\cdots(7')$$

(6')(7')と(2)から

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \phi\partial \rho}\cos\phi-\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\phi-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\sin\phi+\frac{\partial f}{\partial \phi}\cos\phi\right)\right\}\left(-\frac{1}{\rho}\sin\phi\right)$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi\partial \rho}\sin\phi\cos\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\sin^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\cos\phi\cdots(8')$$

(4)の右辺を(8)と(8')によって書き換えると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\phi}\sin\phi\cos\phi\right\}$$

$$+\left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\partial\rho}\sin\phi\cos\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\sin^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\phi}\sin\phi\cos\phi\right\}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\phi+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\cos\phi-\frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\phi}\sin\phi\cos\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\sin^2\phi\cdots(9)$$

となり，教科書 p.237 の巻末略解と同じものを得る．

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$についても，ほとんど同様の計算なので，各自練習せよ．教科書と同じ式をここに記すと

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\sin^2\phi-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}\sin\phi\cos\phi+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\phi}\sin\phi\cos\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}\cos^2\phi+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\cos^2\phi\cdots(10)$$

(9)と(10)を加えると$\sin\phi\cos\phi$の項は異符号で打ち消しあい，さらに$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$となることを用いると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\cdots(11)$$

の最終結果を得る．

[4](1)

$f(x,y)=f(\rho,\phi)$が ρ だけの関数であることと，ϕ が変数として含まれないことは同じこと．ϕ が含まれないことと$f_\phi=0$は同じことである．したがって$x\,f_y-y\,f_x=0$と$f_\phi=0$が同じであることを示せばよい．前ページ式(3)から

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\sin\phi$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\cos\phi$$

これらを用いると

$$x\,f_y-y\,f_x=(\rho\cos\phi)\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin\phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\cos\phi\right)-(\rho\sin\phi)\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\cos\phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\sin\phi\right)=\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

したがって$x\,f_y-y\,f_x=0$と$\frac{\partial f}{\partial\phi}=0$は同値であり，このとき$f$は ρ だけの関数である．

(2)は各自確認せよ．