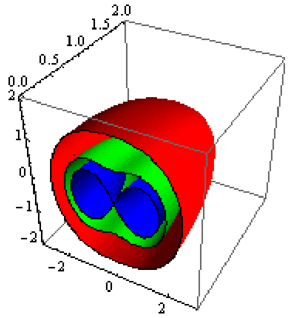
Q. 変数が 3 個のときのグラフの描き方が分かりません.



A. 変数が 3 個と関数値が 1 個で，全部で 4 個の量の関係を絵に描くのは（3 次元空間の人間としては）難しい.

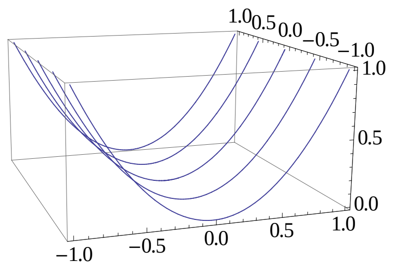
どれか 1 つの変数をある値に固定して 2 変数関数としてのグラフを描き，つぎにその変数を別の値に固定してグラフを描くという方法もあるだろう．また，3 次元空間内に等高面を描くことも行われる（図は等電位面＝電位の等高面の表現例）.

Q. 変数が 3 個以上のときにも偏微分はありますか？

A. 偏微分法は，変数が 2 個以上の場合に「指定された変数だけについて微分を行い，他の変数はすべて定数としてあつかう」もの．2 変数ならば関数のグラフがなんとか描けるので 2 変数関数の例題が多いが，教科書に 3 変数の例がいくつもでている.

練習問題１　　Q. 2 変数の関数のグラフが描けません.

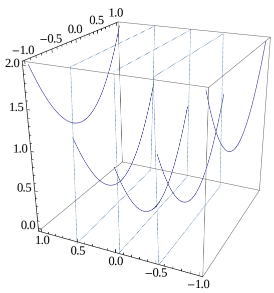
A. ●　2 個ある変数のうち一方をある値に固定して曲線を描く．そして，その値を変えてたくさんの曲線を描く：



✓　$z = x^2$

　yの値を固定する．むろん，z は y の値に依存しない．zx 面内に放物線が描かれる．y 軸方向に任意の距離だけ平行移動したものも$z = x^2$.

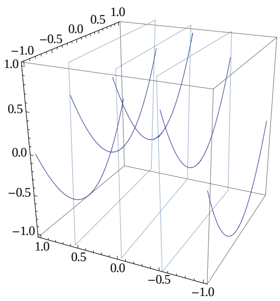
✓　$z = x^2 + y^2$



　$y = 0 \to z = x^2$,　$y = \pm 1 \to z = x^2 + 1$　etc

　xz 面内(y=0)で放物線$z = x^2$，y 軸方向に面を移動すると，移動距離の 2 乗だけ上がった放物線となる.

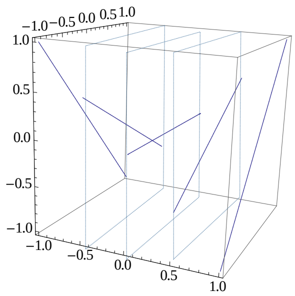
✓　$z = x^2 - y^2$



　$y = 0 \to z = x^2$,　$y = \pm 1 \to z = x^2 - 1$　etc

　xz 面内(y=0)で放物線$z = x^2$，y 軸方向に面を移動すると，移動距離の 2 乗だけ下がった放物線となる.

✓　$z = xy$



　$y = 0 \to z = 0$,　$y = \pm 1 \to z = \pm x$　etc

　xz 面内(y=0)で傾き 0 の直線，y 軸方向に面を移動すると，移動距離により傾きが変化する直線.

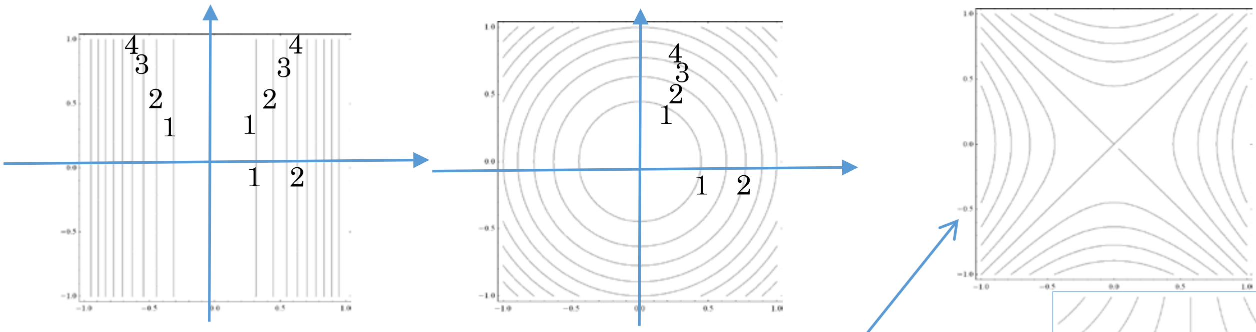
●　等高線を描く.

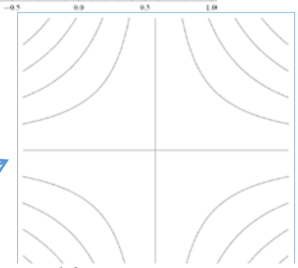
✓　$z = x^2$

　$z = 0 \to x = 0$ (xy 面上の直線)，$z = 1 \to x = \pm 1$ ($x = 0$ に平行)，$z = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$,
　等高線群の詰まり方に注意.

✓　$z = x^2 + y^2$

　$z = 0 \to x = y = 0$(原点)，$z = 1 = x^2 + y^2$(半径 1 の円)，$z = a^2 = x^2 + y^2$(半径aの円)，等高線群の詰まり方に注意.

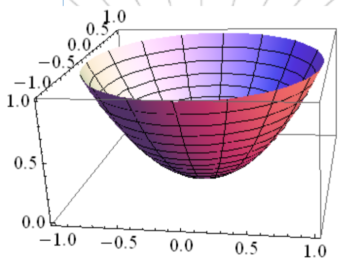




- ✓ $z = x^2 - y^2$

  $z = 0 \to y = \pm x$（2 直線），$z = 1 \to x^2 - y^2 = 1$（双曲線），etc
- ✓ $z = xy$

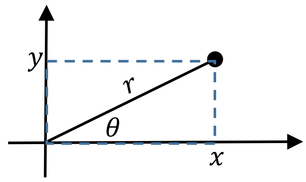
  $z = 0 \to x = 0$ または $y = 0$（座標軸），$z = 1 \to xy = 1$（放物線），etc



- ● 対称性に注意する（たとえば軸対称）
- ✓ $z = x^2 + y^2 = r^2$：z 軸からの距離が一定なら同じ値．放物線$z = x^2$を z 軸のまわりに回転した図形．

練習問題２

Q.「極座標で表す」ときの「$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$」は暗記しなければいけませんか.



A. 極座標とは何かを覚えていること,直交座標との関係を図示できることが理系の「常識」. この図を描けるなら，そして三角関数が使えるなら，座標変換の式は誘導できるから暗記する必要はない．逆に，式を覚えても図が描けない状態なら，たぶんその記憶は役に立たないだろうから，無意味な暗記.

練習問題４

Q. 平面の式が $ax + by + cz = 1$なることを公式として学んだのですが，この式から$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$の形を導くことができません.

A. z 軸と平行な平面は，xy 座標平面上の直線をそのまま z 軸方向に移動してつくることができる．言い換えると $y = Ax + B$，$\forall z$ が平面の式である．xy 平面上でこの直線が$(\alpha, 0)$および$(0, \beta)$を通るので，これらの座標を代入すると$\beta = B$，$0 = A\alpha + B = A\alpha + \beta$ となる：

$$y = \frac{-\beta}{\alpha} x + \beta \to \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \forall z$$

を得る.

練習問題８

Q. 偏微分係数 $f_x(1,1)$と$f_y(1,1)$の値を用いると，どのようにして接平面の式が出てくるのかわかりません.

A. $z = f(x, y)$の点(x_0, y_0)における接平面は，曲面$z = f(x, y)$にぴったりと寄りそっている．したがって，曲面の x(および y)軸方向の傾斜と接平面の x(および y)軸方向の傾斜が等しい：接平面の式を

$$z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + z_0$$

とすると

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0)$$

となる．接平面は点(x_0, y_0)で$z_0 = f(x_0, y_0)$を通過するので

$$z = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

となる.