積分法　メモ　01 不定積分

復習

不定積分：微分すると$f(x)$になる関数$F(x)$を求める作業

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),\quad F(x)\text{のすべてを} \int f(x)dx \text{ で表す}$$

$$\int \frac{dF}{dx}dx = \int dF = F(x) + C$$

「微分法」の復習：不定積分の能力は微分法の経験度（記憶）に依存する
「微分法」の実践：計算結果が出たら微分して正否を確認せよ

1. 置換積分法

変数を別なものに変えると、知っている積分になるとき

$$F(x) = G(u(x)) = G(u)$$

$$\int dG = \int \frac{dG}{du}du = \int \boxed{\frac{dG}{du}\frac{du}{dx}}dx = \int \boxed{\frac{dF}{dx}dx}$$

例

$$\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b)d(ax+b) \times \frac{1}{a}$$

$$\int \frac{f'}{f}dx = \int \frac{df}{f} = \log|f| + C$$

$$\int (f(x))^n f' dx = \int (f(x))^n df = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C$$

1. 部分積分法 integration by parts

- $(u(x)v(x))' = u'v + u\,v'$

$$\rightarrow \int (uv)'dx = u(x)v(x) = \int (u'v)dx + \int (u\,v')dx$$

- $\int f(x)dx = \int u'v\,dx = u(x)v(x) - \int u\,v'dx$
  - $f = u'v$としたとき，$\int u'v\,dx$より$\int uv'dx$の計算が楽なら，利用する
    - ✓ vよりv' が簡単な関数になるとき
    - ✓ u'の積分が既知で複雑でないとき
- 例
  - $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$
  - $\int x\,e^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$
  - $\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$
    $= e^x\sin x - \{e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)dx\}$
    $\rightarrow\ 2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$

2. 部分分数分解 partial fraction

- 有理式の積分において，被積分関数を簡単にする
- $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},\quad \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \left[\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right]\frac{1}{x-c}$
- $\frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{(x-a)f(x)+A}{(x-a)(x-b)} = \frac{f(x)}{x-b} + \frac{A}{(x-a)(x-b)}$
- 実係数多項式の因数分解

3. 例題　4.2 (3)　　c.f. 問 3-3 {3} (12) p.52/p.220

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$　三角関数で置換積分

$$\boxed{x = \tan\theta} \rightarrow 1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}(>0)\to dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\to\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\cos\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}>0\to\frac{d\theta}{\cos\theta}>0\to 0<\theta<\frac{\pi}{2};\text{定積分のときの区間に注意}\right)$$

$\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$の被積分関数は「三角関数の有理関数」であり積分できる

c.f. 問 4-2{4} p.87,　問 2-2 {3}, p.26

$$\boxed{t=\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\to\cos\theta=\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\to\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1+t^2}{2}$$

$$\to\boxed{\int\frac{d\theta}{\cos\theta}}=\int\frac{d\theta/dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1-t}+\int\frac{dt}{1+t}$$

$$=\boxed{\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|}$$

$$x=\tan\theta=\tan\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$1-t^2=\frac{2t}{x}\to t^2+\frac{2}{x}t-1=0$$

$$\to t=\frac{-1}{x}\pm\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{x}\left(-1\pm\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{x}\left(-1+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$x\to0$ のとき $t\to0$ となるようにした

$$\frac{t+1}{t-1}=\frac{\frac{1}{x}\left(-1+\sqrt{x^2+1}\right)+1}{\frac{1}{x}\left(-1+\sqrt{x^2+1}\right)-1}=\frac{-1+\sqrt{x^2+1}+x}{-1+\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\sqrt{x^2+1}+(x-1)}{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}$$

$$=\frac{\left\{\sqrt{x^2+1}+(x-1)\right\}\left\{\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right\}}{x^2+1-(x+1)^2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2-1}{-2x}$$

$$=\frac{(x^2+1)+2x\sqrt{x^2+1}+x^2-1}{-2x}=\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{-2x}$$

$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=\log\left|-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right|=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$　双曲線関数で置換積分 , c. f. 演習問題 2 章[4], 3 章[6]

$$\sinh t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}),\quad \cosh t=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}),\qquad \tanh t=\frac{\sinh t}{\cosh t}$$

$$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1\to\cosh^2 t=1+\sinh^2 t,\quad \boxed{\cosh t=\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sinh t=\cosh t,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\cosh t=\sinh t$$

$$\boxed{x=\sinh t}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\frac{dx}{dt}dt}{\cosh t}=\int dt=t=\operatorname{arcsinh}x$$

$$u=\operatorname{arcsinh}x\to x=\sinh u=\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^u}_{z}-\underbrace{e^{-u}}_{1/z}\right)\to z^2-2xz-1=0$$

$$z=e^u=x\underset{<}{\underbrace{\pm}}\sqrt{x^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}(>0)$$

積分法　メモ　01 不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = u = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \ + \mathrm{C}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$　変数を複素数まで拡張して積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d(iu)}{\sqrt{1+(iu)^2}} = i\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = i \arcsin u = i \arcsin\left(\frac{x}{i}\right) \equiv \mathrm{z}$$

$$z = i \arcsin\left(\frac{x}{i}\right) \to \frac{x}{i} = \sin\left(\frac{z}{i}\right) = \frac{e^{i\frac{z}{i}} - e^{-i\frac{z}{i}}}{2i} = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{z}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{z}})}{2i}$$

$$x = \sinh z, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = z = \operatorname{arcsinh} x$$

問題 4-2　2(6)

$$x = \tan\theta,\ x^2 + 1 = \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}, \qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{-2} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\tan\theta\cos^2\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\ \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} arctan\, x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C$$