積分法 02 定積分

１．面積の計算

- 長方形　縦×横
- 一般の図形、膨大な数の微小な長方形を寄せ集める、極限
- 微小な線分⇒曲線の長さ、微小な直方体⇒体積、図形に限らず

２．リーマン和

- $S_N = \sum_{k=0,N-1} f(x_k)\Delta x$ 、$\Delta x = x_{k+1} - x_k = (x_{N+1} - x_n)\frac{1}{N}$
- 図，極限をとる：$\lim_{N\to\infty,\Delta x\to 0} \sum_{k=0,N-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$

３．例

- $f(x) = x, a = x_0 = 1, b = x_N = 3, \Delta x = \frac{b-a}{N}$　$S = 4$
  - ✓ $N = 2; \Delta x = \frac{3-1}{2} = 1;\ S_2 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 = 3$
  - ✓ $S_N = \sum_{k=0,N-1} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=0,N-1} x_k\,\Delta x$

$$= \sum_{k=0,N-1} (x_0 + k\Delta x)\cdot\Delta x \ = \sum_{k=0,N-1} (x_0\Delta x + k\Delta x^2)$$

$$= x_0\Delta x \sum_{k=0,N-1} 1 + (\Delta x^2) \sum_{k=0,N-1} k = x_0\Delta x N + (\Delta x^2)\frac{N\cdot N-1}{2}$$

$$= a\frac{b-a}{N}N + \left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \frac{N\cdot N-1}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right)$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{(b-a)(a+b)}{2} = (b^2-a^2)\frac{1}{2} = \frac{9-1}{2} = 4$$

４．基本定理：　リーマン和の極限は不定積分で計算できる（ことがある）

- 図：$a \sim x$までの「面積」を$S(x)$と書く：　$S(x+\Delta x) - S(x) \simeq f(x)\Delta x$

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x);\quad \int f(x)dx = S(x), \text{ただし} S(a) = 0$$

$$a \to b\text{の面積}：S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)dx$$

５．面積←符号

６．不定積分の性質: 被積分関数は区間内で連続とする

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$a \le x \le b\text{で}f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

$$\exists c,\quad a < c < b \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

$$m \le f(x) \le M \ \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = f(t)$$

７．置換積分での注意

・積分区間の変更

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{x=a}^{b}\left[g(u(x))\frac{du}{dx}\right]dx \ = \int_{u=u(a)}^{u(b)} g(u)du$$

$$:\ \int_{x=-1/2}^{2} x^2\cos x^3\ dx = \frac{1}{3}\int_{t=-1/8}^{8}\cos t\,dt$$

・周期関数を置換したとき

$\int f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ の積分区間を，周期関数の単調な区間に制限する

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos x} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos x} = 2\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}, \qquad a > 1$$

$$\frac{1}{a-\cos x} = \frac{1}{a-\cos(2\pi-x)}:\text{周期 }2\pi\text{ の偶関数}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos x} = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos(2\pi-x)} = \int_{\pi}^{0}\frac{d(-z)}{a-\cos z} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}$$

積分法 02 定積分

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a-\cos x}=\int_0^{\infty}\frac{2dt}{(a-1)+(a+1)t^2}=\frac{2}{a+1}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}$$

$$=\frac{2}{a+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right)\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right)\right]_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\times\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a-\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\mathrm{t}=\tan\frac{x}{2}, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=0\rightarrow t=0,\qquad x=\pi\rightarrow t=\infty,\qquad x=2\pi\rightarrow t=0$$

８．曲線の長さ，極座標での面積，回転体などの体積

９．和を積分で近似する