確率・統計

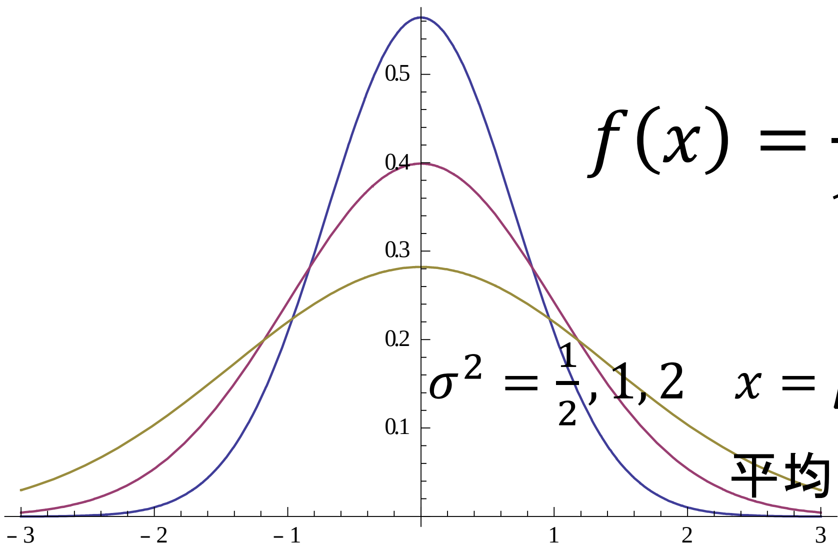
A. 正規分布

- 多数の確率変数が，すべて同じ平均μと分散σ^2をもつとき

中心極限定理

  - 多数の変数の平均は，その平均μと分散σ^2の正規分布に近づく

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$\sigma^2 = \frac{1}{2}, 1, 2$　$x = \mu \pm \sigma$でピークの1/√e

平均の前後，幅±σ　の内側 = 2/3

A 二項分布から正規分布へ 中心極限定理の実例(1)

例：コインの表が出たら1，裏が出たら -1，等確率 ½+½=1

N個のコインを投げる．k番目のコインの裏表は確率的に決まる：

$$X_k = \{-1,1\}, \qquad k = 1,2,\cdots,N \ , \ p_{-1} = p_1 = \frac{1}{2},$$

$$\mu = (-1)\times p_{-1} + (1)\times p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\sigma^2 = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

N個のコインの裏表を数にして総和をとると，これも確率的に決まる：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \{-N, -N+1, \cdots, N-1, N\}$$

1が $\frac{N+x}{2}$ 回, -1が$\frac{N-x}{2}$ 回 $\Rightarrow$ Xの値=$\left(\frac{N+x}{2}\right)\times(1) + \left(\frac{N-x}{2}\right)\times(-1) = x$

$$P_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)!\left(\frac{N-x}{2}\right)!}$$

A 二項分布から正規分布へ 中心極限定理の実例(2)

$P_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)!\left(\frac{N-x}{2}\right)!}$: *Nが大きくなると夫々の階乗は膨大⇒対数スケールで調べる*

$\log N! \simeq N\log N - N$ *を用いると*

$$\log P_X(x)$$
$$\simeq -N\log 2 + \{N\log N - N\} - \left\{\left(\frac{N+x}{2}\right)\log\left(\frac{N+x}{2}\right) - \left(\frac{N+x}{2}\right)\right\}$$
$$-\left\{\left(\frac{N-x}{2}\right)\log\left(\frac{N-x}{2}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right)\right\}$$

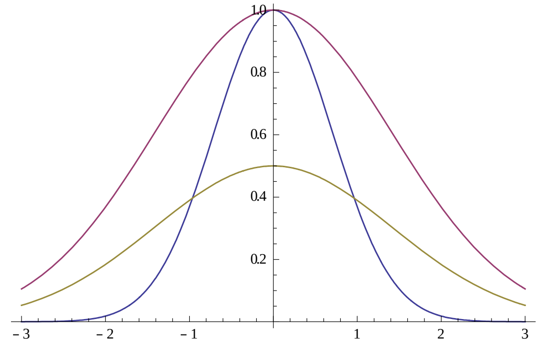
$\log\left(1+\frac{x}{N}\right) \simeq \frac{x}{N} - \frac{1}{2}x^2 \quad (x \ll N)$ *を用いると*

$$\log\left(\frac{N+x}{2}\right) = \log\left(\frac{N}{2}\left(1+\frac{x}{N}\right)\right) = \log\frac{N}{2} + \log\left(1+\frac{x}{N}\right) \simeq \log\frac{N}{2} + \frac{x}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{N}\right)^2$$

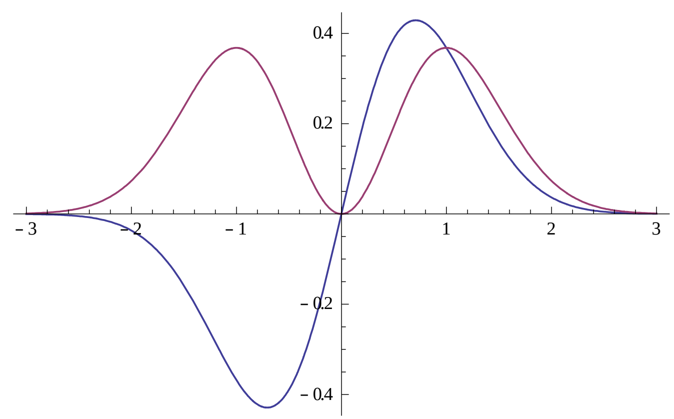
よって

$$\log P_X(x) \simeq -\frac{x^2}{2N} \qquad \therefore\ P_X(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2N}} \quad \to \sigma_N^2 = N\sigma^2$$

B1. ガウス関数の性質



- $f_1(x) = \exp(-x^2)$　:偶関数,
- $f_2(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$: f_1のグラフを横に2倍に拡大
  - 規格化するには，縦に ½倍する



- $f_3(x) = x\ \exp(-x^2)$:奇関数
- $f_4(x) = x^2 \exp(-x^2)$: 偶関数

B2. ガウス関数の積分

1. $\int_a^b e^{cx} dx = \frac{1}{c}[e^{cx}]_a^b = \frac{1}{c}(e^{cb} - e^{ca})$
2. $\int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{-1}(e^{-\infty} - e^{-0}) = e^0 - e^{-\infty} = 1$
3. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$
4. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2} dx = 0$
5. $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \int_{t=0}^\infty e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{t=0}^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{2}$
6. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^\infty x \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{2} e^{-x^2}\right) dx$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left[xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

B3. ガウス関数の積分

1. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \sqrt{\pi} \times \sqrt{2}\sigma$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$
3. 奇関数の対称領域での積分0,
4. $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \sqrt{\pi}$
6. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu) = \sigma^2$

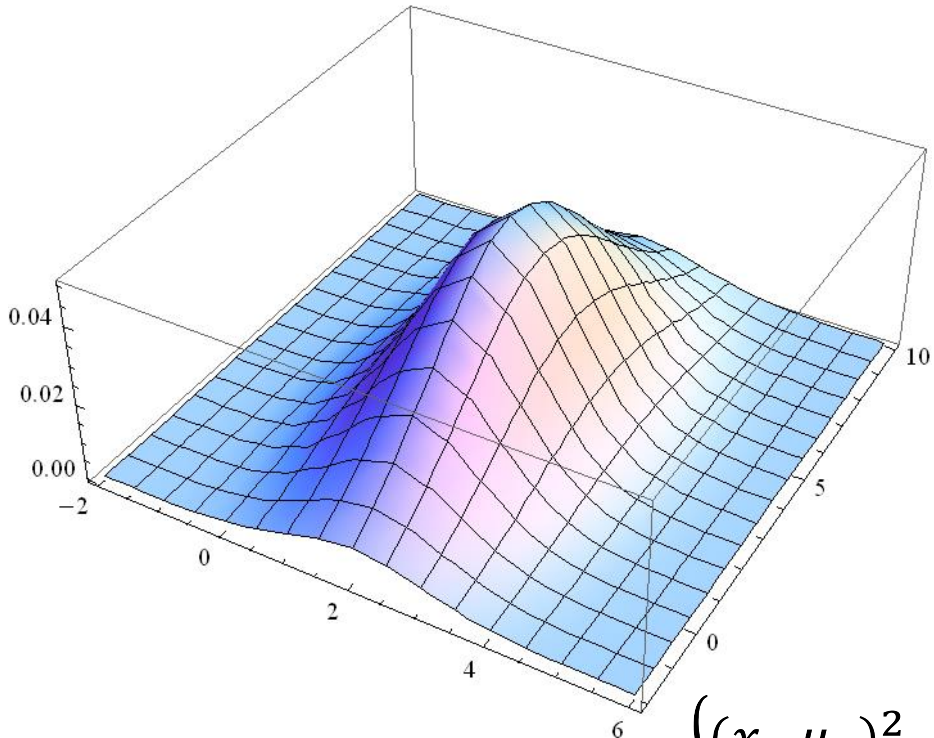
C. 2次元正規分布

- 独立な確率変数X,Y
  同時確率密度関数：$f(x,y)=f(x)\times f(y)$

- $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}}$$

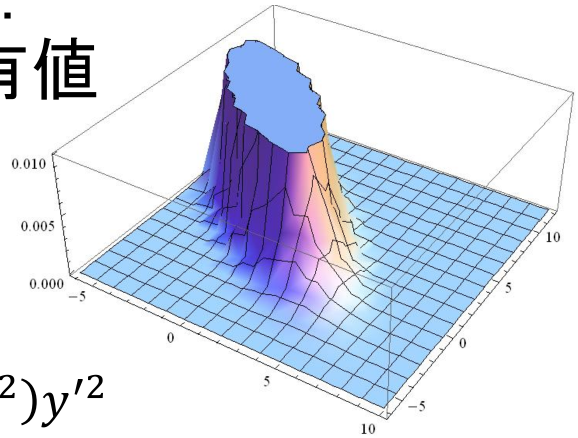
2次元正規分布



$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}}$$

座標を回転する

- 指数関数の肩だけを注目すればよい:
  2次形式の主軸変換, 固有値



$c = \cos\theta,\ s = \sin\theta$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \alpha(cx' + sy')^2 + \beta(-sx' + cy')^2$$
$$= (\alpha\alpha + \beta s^2)x'^2 + 2(\alpha - \beta)csx'y' + (\alpha s^2 + Bc^2)y'^2$$
$$= \alpha' x'^2 + 2\gamma' x' y' + \beta' y'^2$$

$$(x, y)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (x', y')\begin{pmatrix}\alpha' & \gamma'\\ \gamma' & \beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$
$$= \left\{(x', y')\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\right\}$$
$$= (x', y')\left[\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

C1

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right\}}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2A^2}}\,e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dxdy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2B^2}}\,dy$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(Cx + Dy)e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right\}}\,dxdy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Cxe^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2B^2}}\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} Dye^{-\frac{y^2}{2B^2}}\,dy$$

C2

$$e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{A^2}-\frac{2C}{AB}xy+\frac{y^2}{B^2}\right\}}=e^{-\frac{1}{2}\{u^2+v^2\}}$$

$$u=\alpha\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right),\ v=\beta\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right),\alpha^2+\beta^2=1,\alpha^2-\beta^2=C$$

$$dxdy=\left\|\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\|dudv=\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}$$

$$\iint_{全} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{A^2}-\frac{2C}{AB}xy+\frac{y^2}{B^2}\right\}}dxdy=\iint_{全} e^{-\frac{1}{2}\{u^2+v^2\}}\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}dudv$$