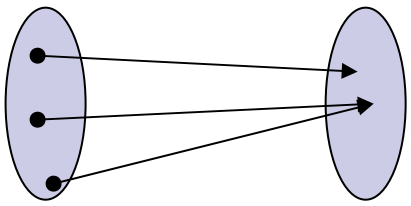
2A　変数と関数

用語：関数：集合→集合の対応規則

- 定数：$a,b,c,..$
- 変数：$s,t,u,v,w,x,y,z,$
- 集合：元を定義できるもの
  - $\{a,b,c,\ldots\}$
  - $\{x \mid x$に関する条件$\}$
- $y=f(x)$
- 独立変数x、従属変数y
- 定義域　$\{x \mid x$に関する条件$\}$
- 値域　　$\{f(x) \mid x$に関する条件$\}$



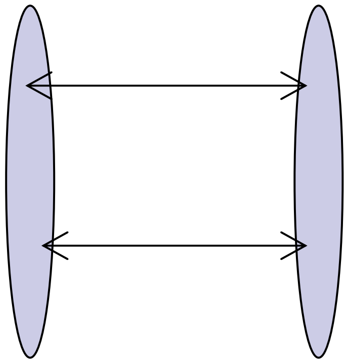
分類
- 1変数関数
- 多変数関数
- 1価関数
- 多価関数

用語：関数のグラフ

- １変数関数のグラフ：
    - 座標
    - 点$(x, y = f(x))$をつなげた線
    - （広義）単調
    - 多価関数のグラフ
- ２変数関数のグラフ

逆関数

- 関数fが１価、単調のとき、対応の規則を逆にたどったものも1価、単調で関数gとなる
  - f^{-1}:「f インバース」と読む
  - $g = f^{-1}$ および $f = g^{-1}$となる
- 関数 f と g が互いに逆関数なのは次に限る
  - $f(\, g(x)\,) = x$ かつ $g(\, f(x)\,) = x.$

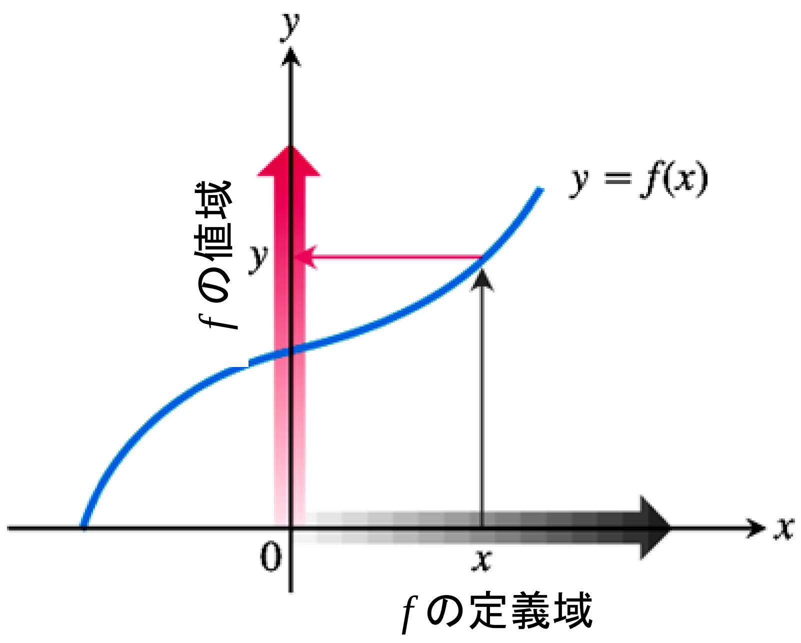


逆関数の例

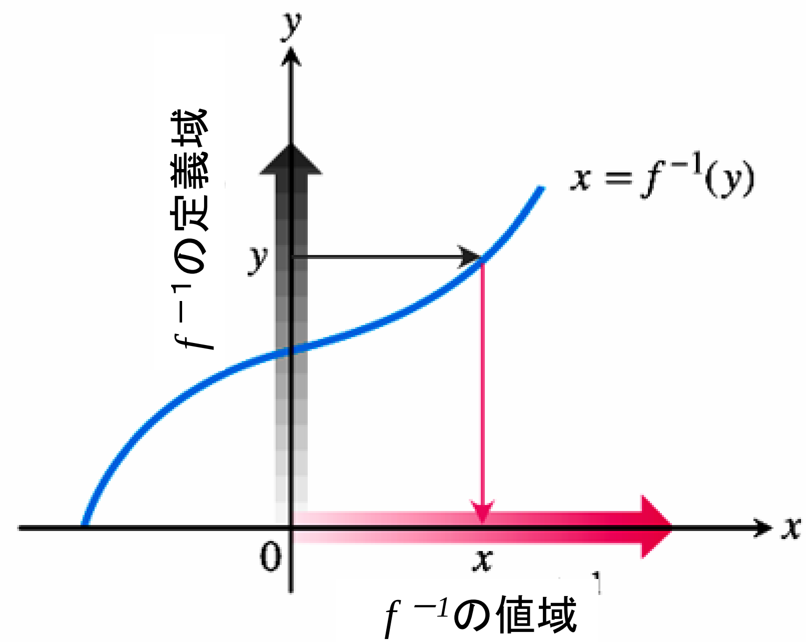
$$f(x) = 3x,\ g(x) = \frac{x}{3} \qquad yes$$

$$f(x) = x,\ g(x) = \frac{1}{x} \qquad no$$

逆関数のグラフを描く(1)

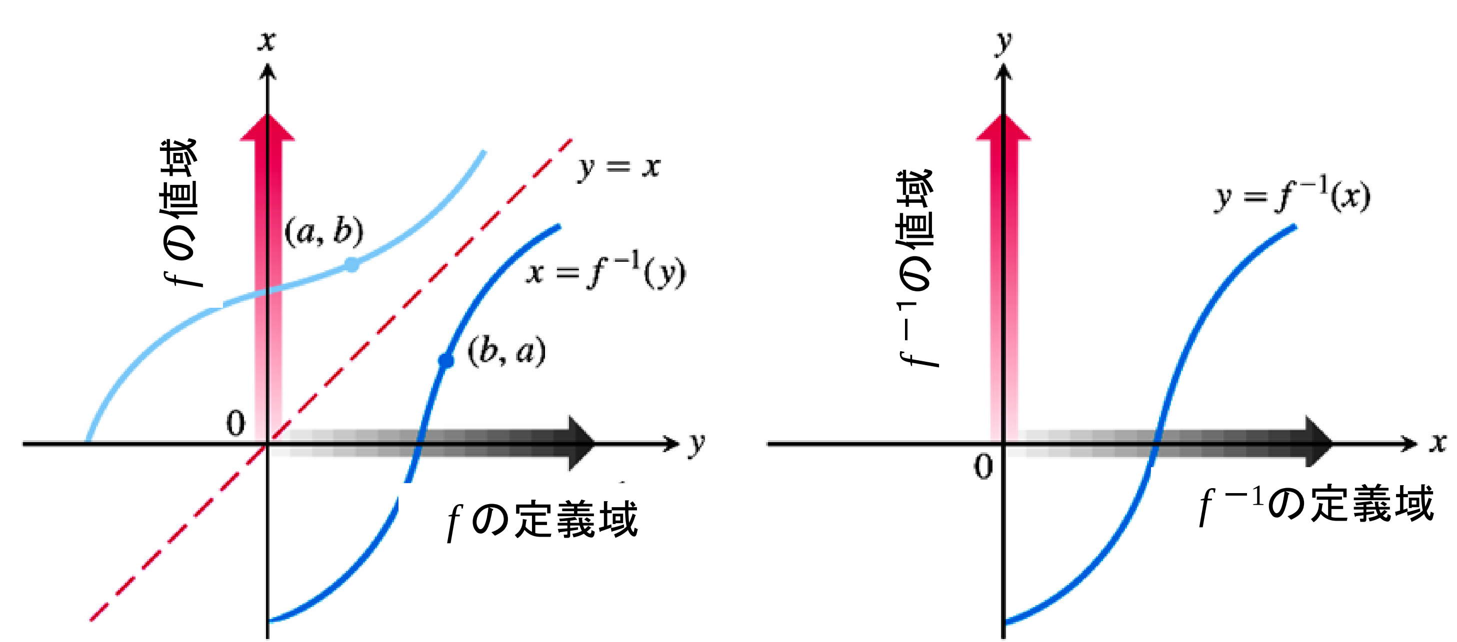


(a) xにおけるf の値を求めるには、グラフの曲線にぶつかるまで上に行き、次にそこからy軸の方に行く



(b) f が「xに対して$y=f(x)$を与える規則」だから、f の逆関数は「そのyに対してもとのxを与える規則」。$y=f(x)$のグラフを用いて表すなら、「y軸上の点から出発し、グラフに当たったらx軸の方に行く」規則。f の値域がf^{-1}の定義域、f の定義域がf^{-1}の値域。

逆関数のグラフを描く(2)



(c) 普通のやりかたで$y = f^{-1}(x)$のグラフを描くには、, まず$y = f(x)$のグラフを座標軸もいっしょに「直線 y=x を鏡面としてひっくりかえす」する。

(d) 次にx軸とy軸を入れ替える。これで、普通の意味で、$y = f^{-1}(x)$のグラフが出来上がる。

式を解いて逆関数を求める

- $y = f(x)$ を $x = \ldots$ の形に解く(右辺はyだけの関数)
- x と y を入れ替える.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$x = 2y - 2$$

$$\rightarrow$$

$$y = 2x - 2$$

$$f^{-1}(x) = 2x - 2$$

$$y = x^2, x \geq 0$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$\rightarrow$$

$$y = \sqrt{x}$$

グラフの移動と変形

- 平行移動: $f(x) \to f(x-a)+b$
- 原点について反転: $f(x) \to -f(-x)$
- X軸について反転: $f(x) \to -f(x)$
- Y軸について反転: $f(x) \to f(-x)$
- X軸方向にa倍に引き伸ばす(原点は固定): $f(x/a)$
- Y軸方向にb倍に引き伸ばす(原点は固定): $b\,f(x)$

問: 原点の周りにθ回転すると?

奇関数と偶関数

- 奇
  - $f(-x) = -f(x)$、原点に対して対称（ひっくり返した後と前に差がない）
  - 例: $y = x$
- 偶
  - $f(-x) = f(x)$、y軸に対して対称
  - 例 $y=x^2$
- 問: どんな関数も奇関数と偶関数の和で表せる.

周期関数

- x軸方向にa移動しても、前後で差がない：
  - $f(x+a) = f(x)$
  - 周期 a