基本的な関数

有理関数、無理関数

- 出発点は多項式
  - 1次式、2次式…n次式
- 多項式
- 有理関数：多項式の比
- 無理関数：

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$y = p(x)$$

$$y = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$p_n(x) y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \cdots + p_1(x) y + p_0(x) = 0$$

を解いて $y=$…の形にしたとき、有理関数にならないもの、たとえば

$$y^2 - (x^2 + 1) = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$$

指数記号

- 指数記号の約束
  - 無理数のべき
  - 有理数列の極限

$$a^0 = 1, a^1 = a, a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n},$$

$$a^n \times a^m = \overbrace{a \times \cdots \times a}^{n} \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^{m} = a^{n+m}$$

$$\left(a^n\right)^m = \overbrace{a^n \times a^n \times \cdots \times a^n}^{m} = a^{nm}$$

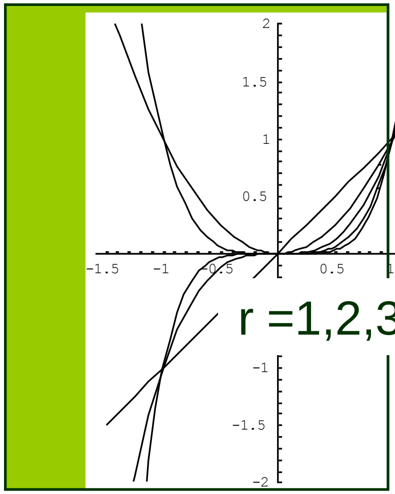
$$\left(a^{n/m}\right)^m = a^n, a^{-n} = 1/a^n$$

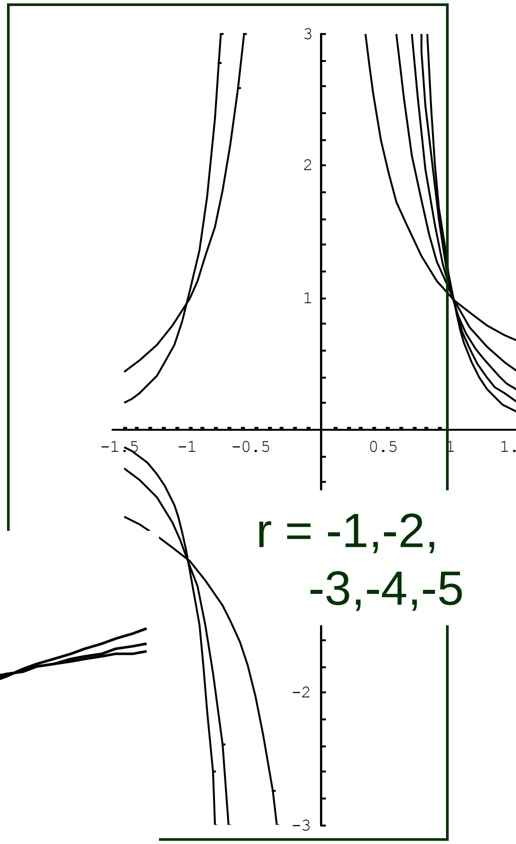
$$r_1, r_2, \cdots \to r$$

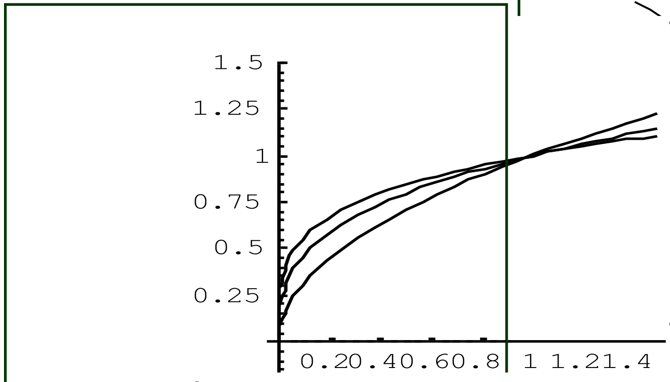
$$a^{r_1}, a^{r_2}, \cdots \to a^r$$

べき関数　$y = ax^r$

- べき「r」は実数
  - 自然数→整数　→
    有理数→無理数
- 定義域は$[0,\infty)$
  - rの値により$(-\infty,\infty)$が可能
- $y = x^r$と$y = x^{1/r}$は逆関数の関係

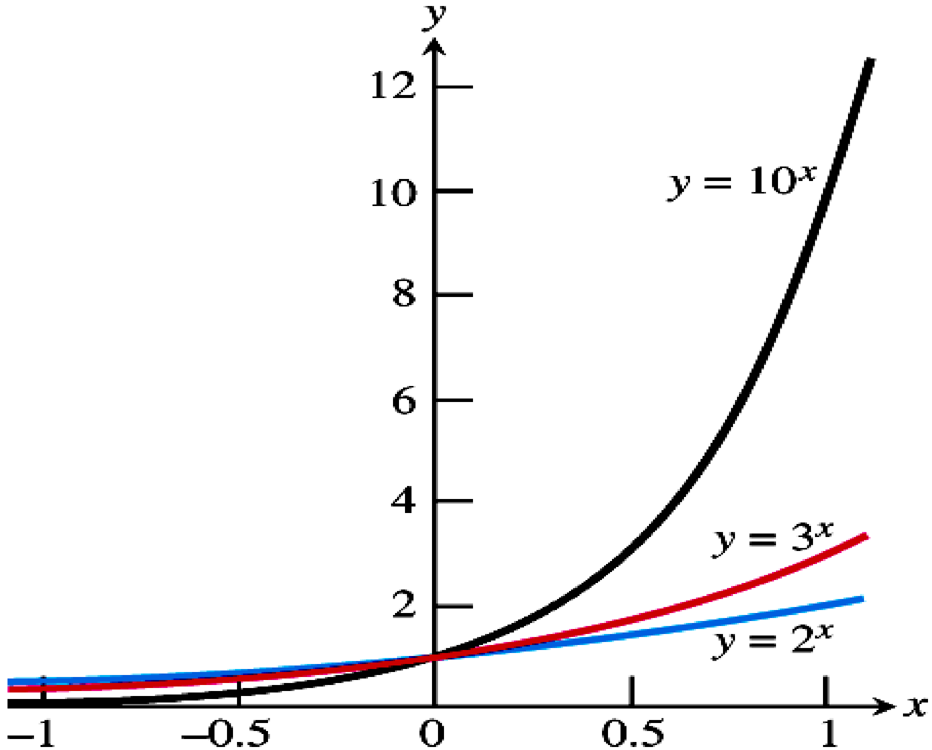

r =1,2,3,4,5


r = -1,-2, -3,-4,-5


r =1/2, 1/3, 1/4

指数関数

$$y = a^x, a > 0$$



単調増加
xが大きいほど急
定義域(−∞、∞)
(0,1)を通る

$a > 1$:右上がり(図)
$a < 1$:右下がり

重要な指数関数　$y = e^x$

$e \approx 2.718....$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

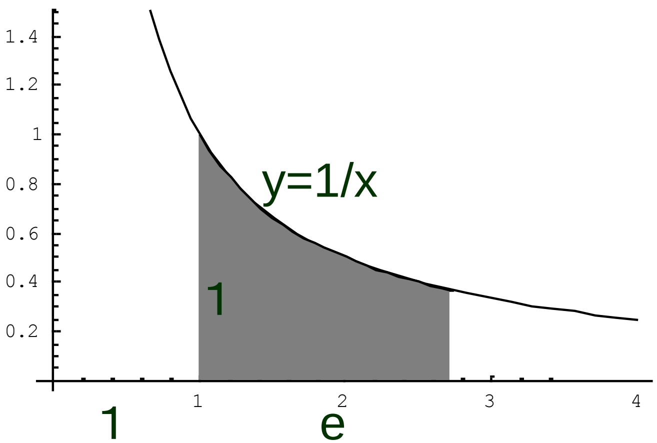
$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

$e^x \approx 1 + x$　　x=0における傾き：1

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

dy/dx = y

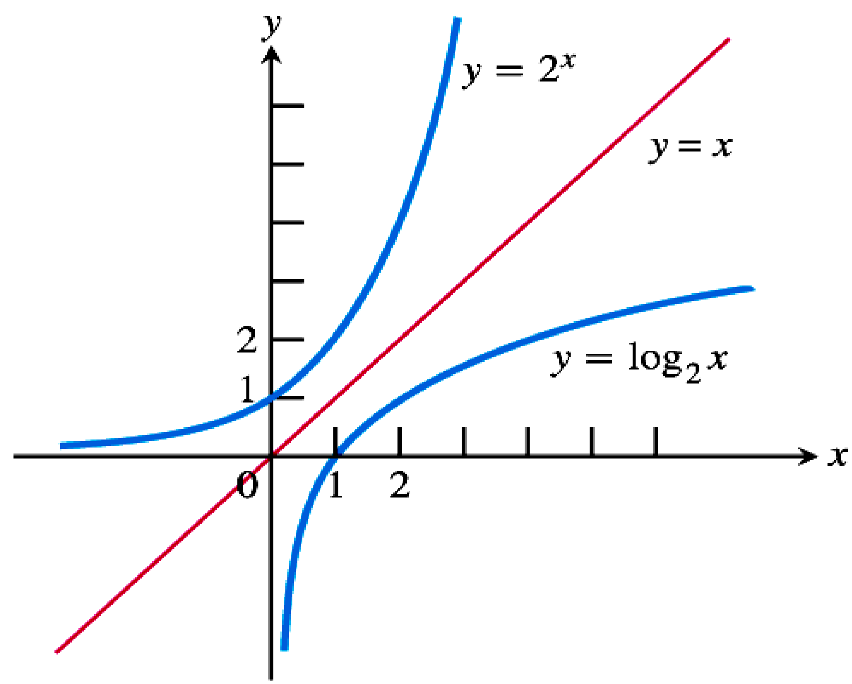
1/xのグラフの下側の面積はxが1～eまでが1となる



対数関数　$y = \log_a x$

- 定義 : $y = a^x$ の逆関数
  - 定義域は正
  - (1,0)を通る
  - 単調増加
  - xが大きいほど緩やか

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$$



対数関数 $y = \log_a x$

- $a = e$:自然対数
- $a = 10$: 常用対数

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$$

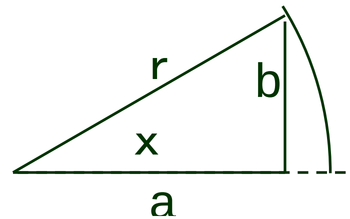
10^n の常用対数はn: 何桁の数かを表す

問:「指数関数の逆関数」という定義から直接に証明せよ

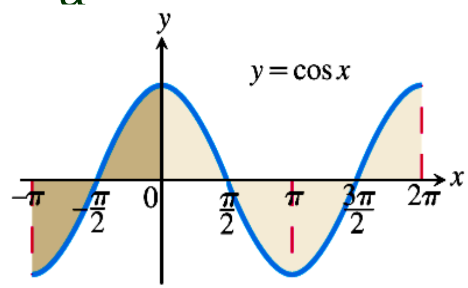
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

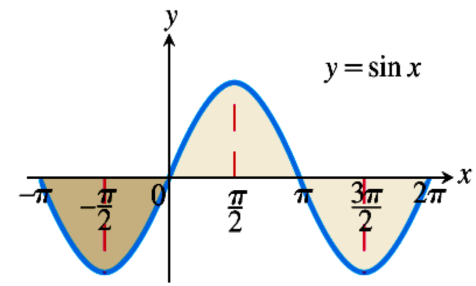
$$\log_a x^y = y \log_a x, \ \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

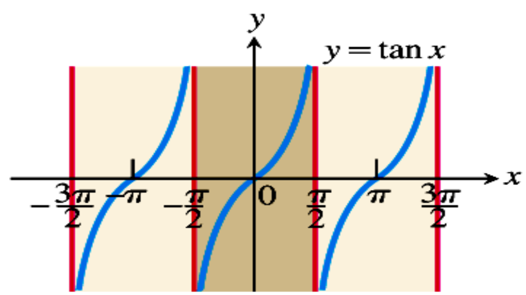
三角関数



- サイン; sin $x = b/r$
- コサイン; cos $x = a/r$
- タンジェント; tan $x = b/a$
- 一般角、符号
- 周期関数
  - 周期(2π)
- 偶、奇

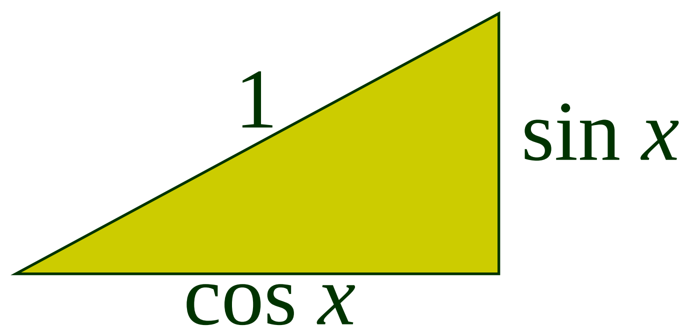






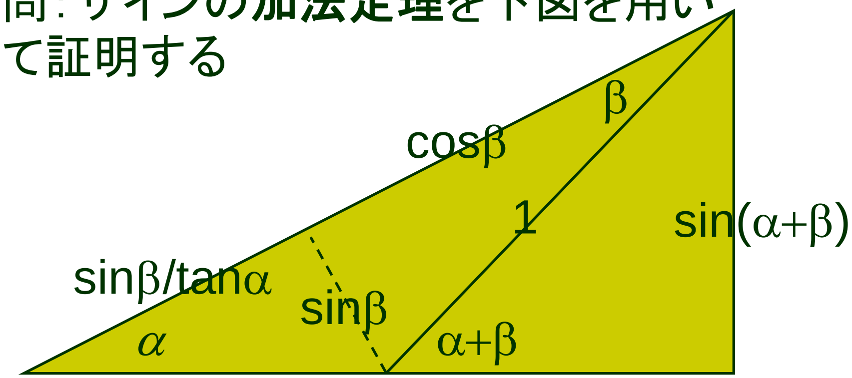
$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

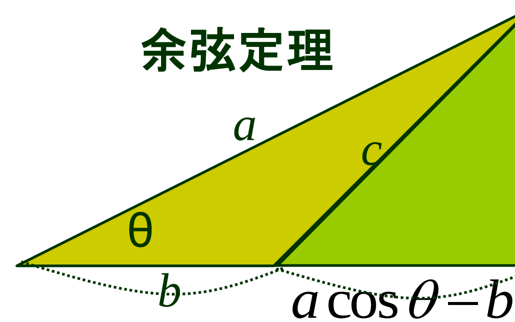


加法定理、余弦定理、正弦定理

問：サインの**加法定理**を下図を用いて証明する

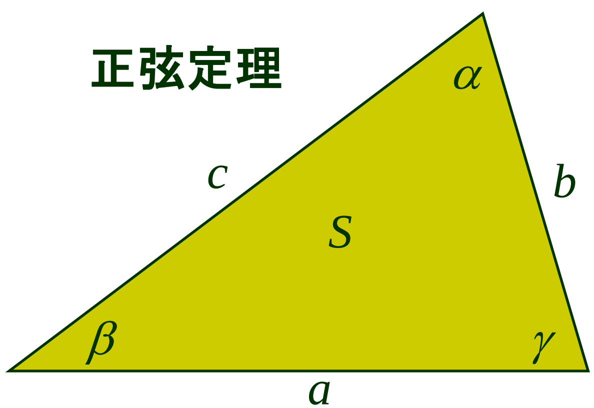


余弦定理



$$
\begin{aligned}
c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

正弦定理

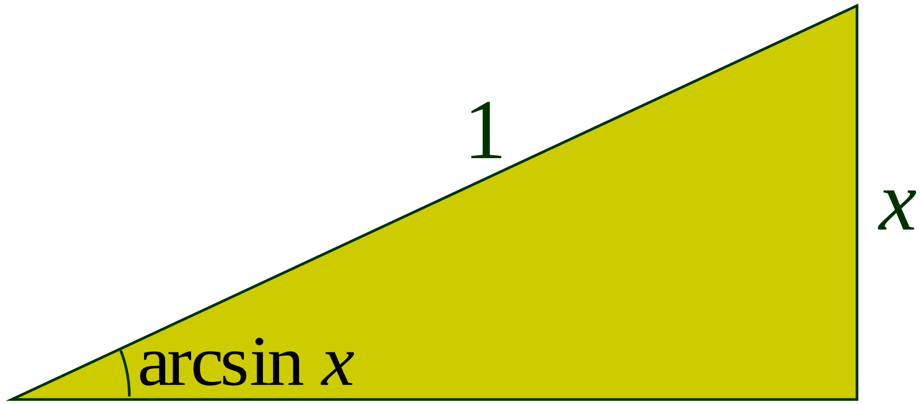


$$
S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ca\sin\beta}{2}
$$

$$
\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}
$$

逆三角関数（アークサイン、その1）

- 必要性：簡単な関数の積分
- $\sin x$: 角xのサインの値は？
- $\arcsin x$: サインの値が x になる角は？
  - $\sin(\arcsin x) = x$: サインの値がxとなる角のサインはx
  - $\arcsin(\sin x) = x$: xのサインの値を持つ角はx



逆三角関数（アークサイン　その2）

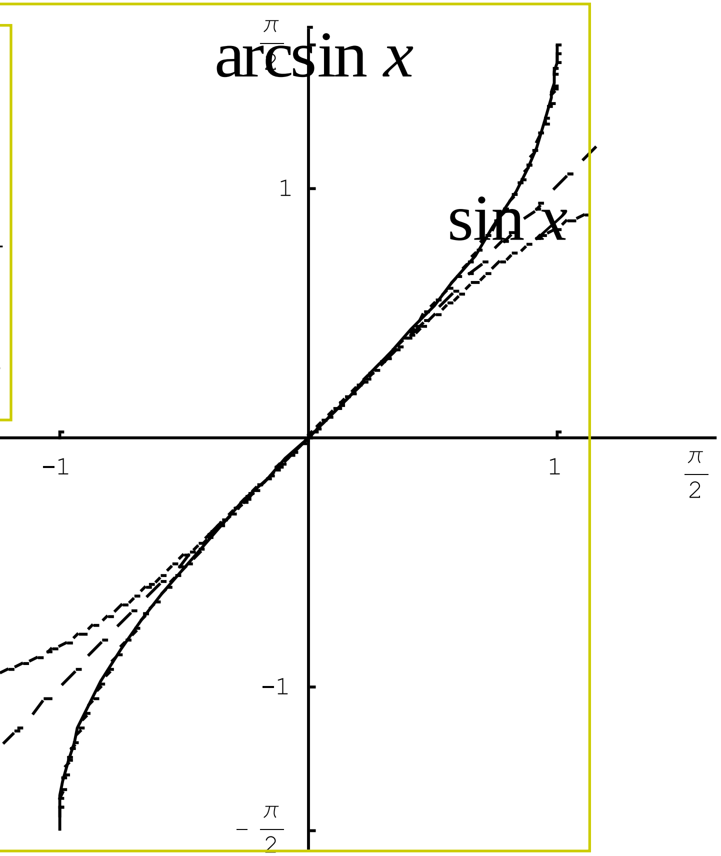
- 逆関数が1価
  サイン関数の定義域を
  [－π/2,π/2]に制限して
  逆関数をつくる
- arcsin関数
  定義域　　[－1,1]
  値域　　　[－π/2,π/2]
- 奇関数

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

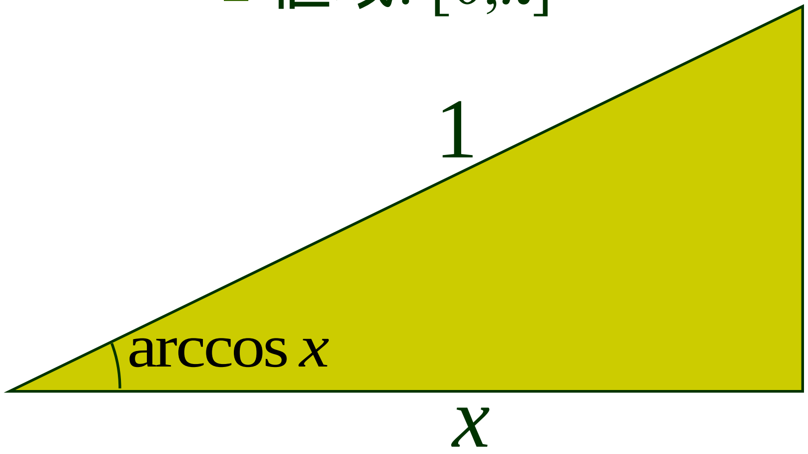
$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

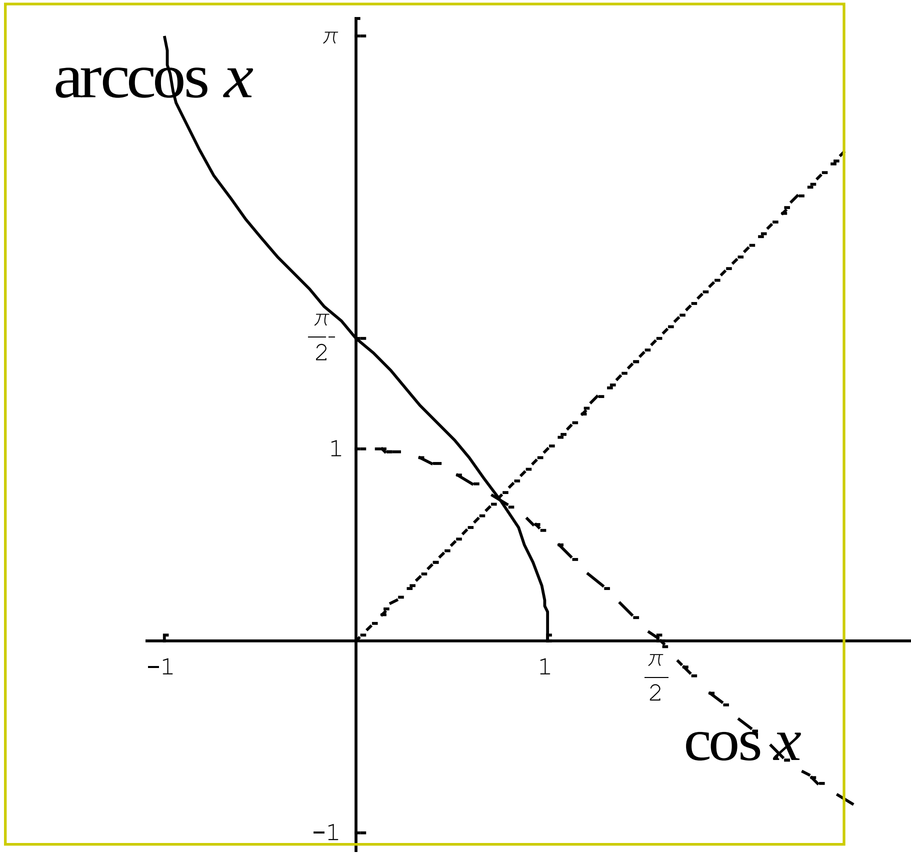
$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$



逆三角関数(アークコサイン)

- コサインの逆関数
  - arccos x = コサインの値がxになる角
  - 定義域: [-1,1]
  - 値域: $[0,\pi]$





逆三角関数(アークタンジェント)

- タンジェントの逆関数
  - arctan x : タンジェントの値が x になる角

定義域: $(-\infty,\infty)$

値域: $(-\pi/2$、$\pi/2)$