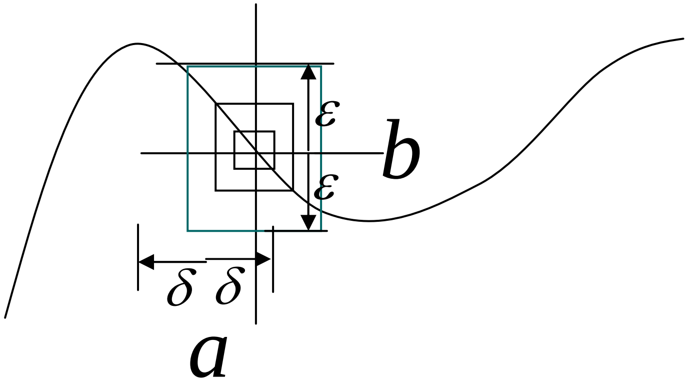
関数の極限

収束,極限値 $\lim_{x\to a} f(x) = b$

- 点(a,b)を中心とする長方形に注目
  - 縦幅２εをどんなに小さくしても、それに応じて横幅２δを小さくすれば、$f(x)$のグラフがはみ出さないようにできる



- $x\to\infty$（$-\infty$）で収束することもある
  - 数列の収束と同じように「εに応じて大きな数が存在し…」のように定義する

<u>教科書 p.32 式(2.26)</u>
任意の $\varepsilon > 0$ に対し,
$0 < |x - a| < \delta$ならば,
$|f(x) - b| < \varepsilon$ になるような
δが存在する

極限値:
　関数値が定義されてなくてもよい

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = A}$$

- 点(a,A)がグラフ上になくてもOK
- 収束するとき、この点にいくらでも近い点(x,　$f(x)$)がある
- ε-δ論法でε$\neq 0$

「$f(x) = x+2$, ただし$x \neq 2$」を一つの式で表すと

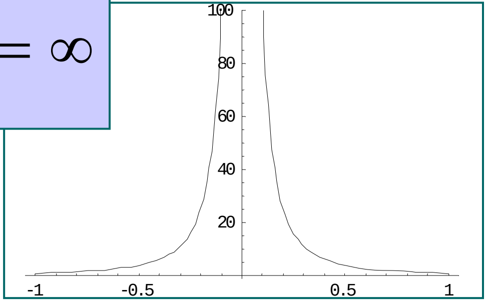
$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$　は「極限をとるときxが2にならない」ことを前提にしている。

発散(収束しない)

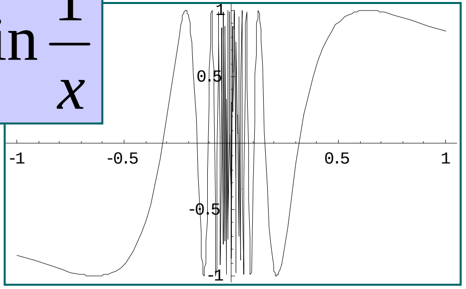
- 無限大に発散

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$



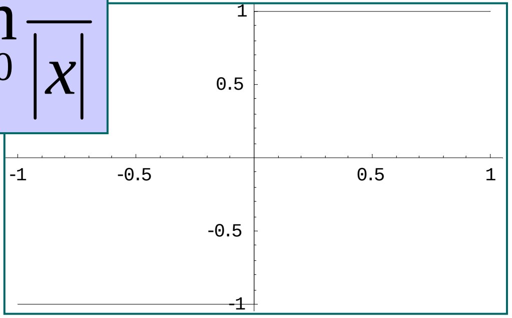
- 振動

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$



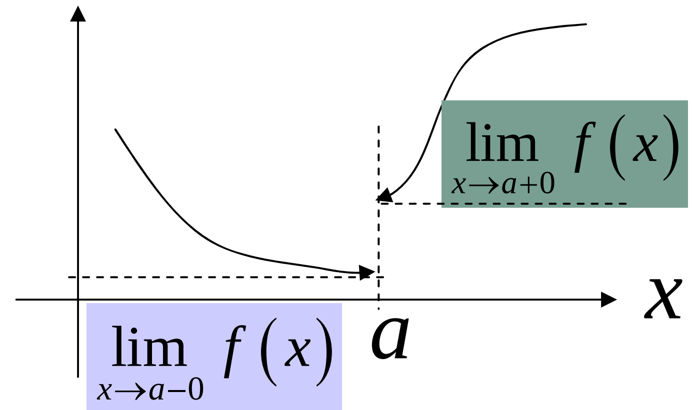
- 左右の極限が異なる

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$$

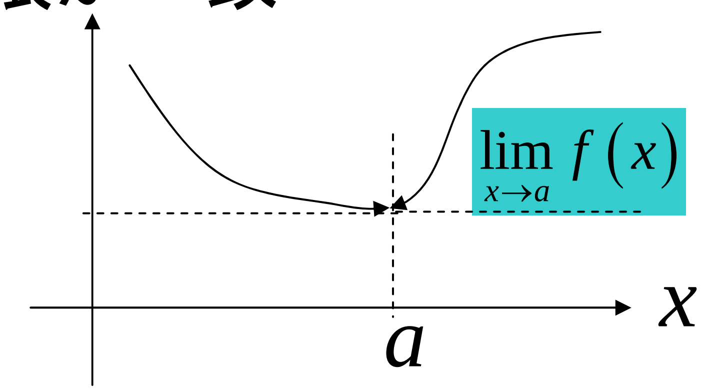


右極限 $\lim\limits_{x\to a+0}$ と 左極限 $\lim\limits_{x\to a-0}$

- 右極限：大きい方から近づく
- 左極限：小さい方から近づく



- 収束：左右極限が一致



$f(x)$と$g(x)$が$x \to a$で収束するとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kA$$

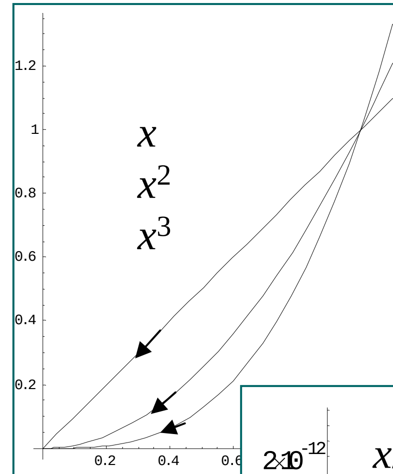
$$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$$

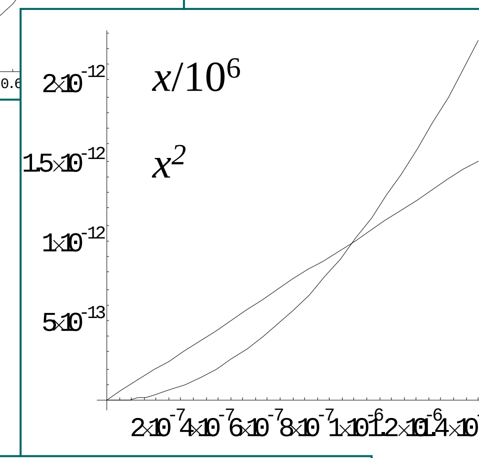
$$\lim_{x \to a} \{f(x) \times g(x)\} = A \times B$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

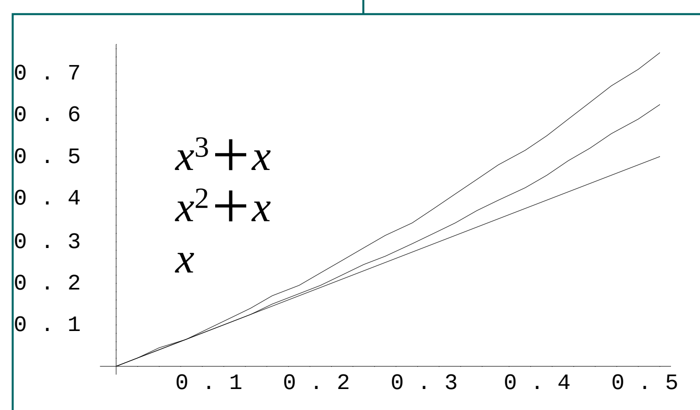
- 式(2.18)
- 既知の極限値を用いて計算できる範囲を広げる

べき関数の収束の速さ





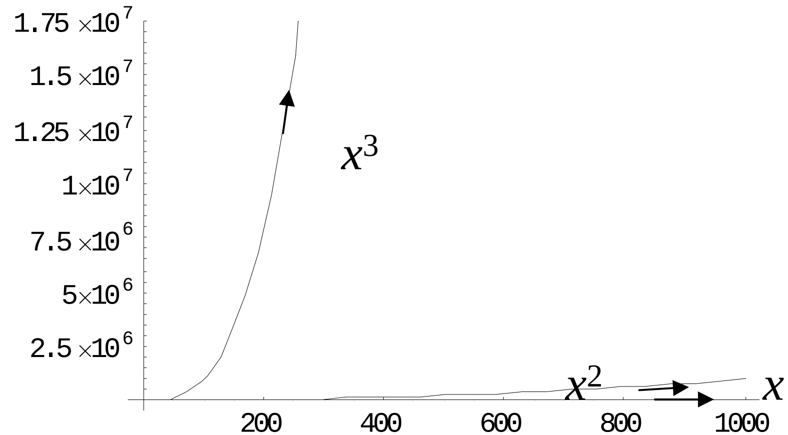
- $f(x)=x^n \to 0 \ \ (x \to 0)$
  - nが大きいほど先に0に近づく
    - x/a と x^2 を比較：aがいかに大きな定数でもx^2 のほうが先に0に近づくようになる



- 最低の次数がnの多項式
  - x^nと同じ速さで0に近づく

べき関数の発散の速さ

- $f(x)=x^{n} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$
  - nが大きいほど先に大きくなる
- 最高の次数がnの多項式
  - x^{n}と同じ速さで大きくなる



発散の速さ（予告編:その他の重要な関係）

- 指数関数の増加はどんな「べき関数」より速い

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

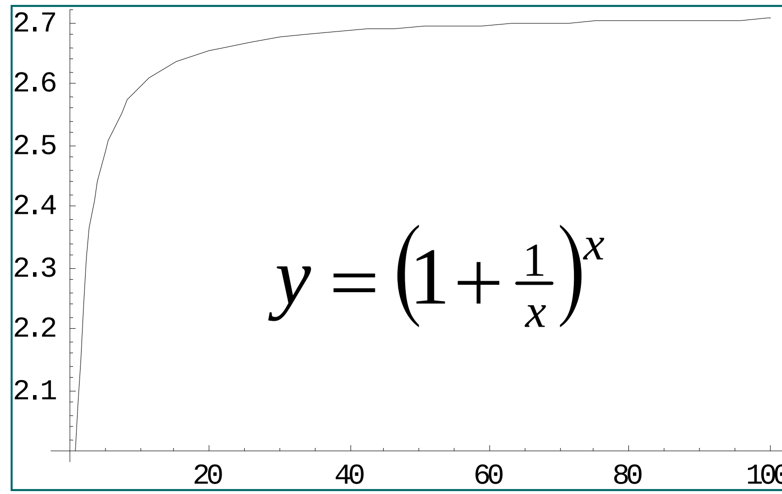
- 対数関数の増加はどんな「べき関数」より遅い

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\log x}=\infty$$

重要な極限 1

数列)^{n}は
単調増加、(1+1/n有界

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$n<x<n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}$$

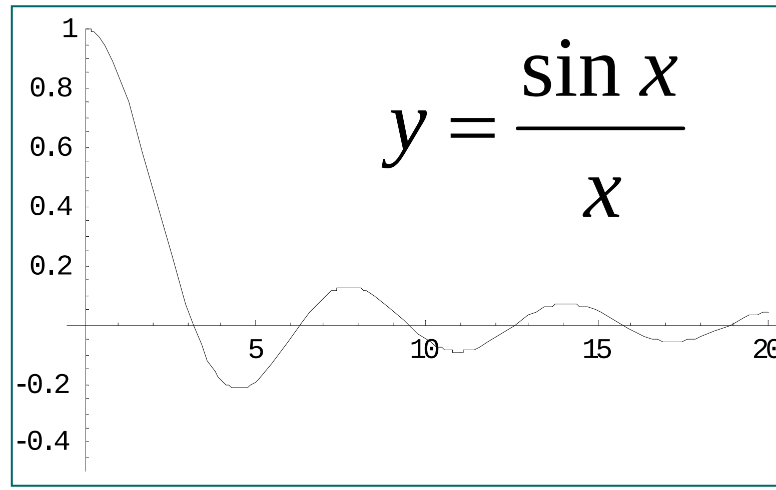
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{1}$$

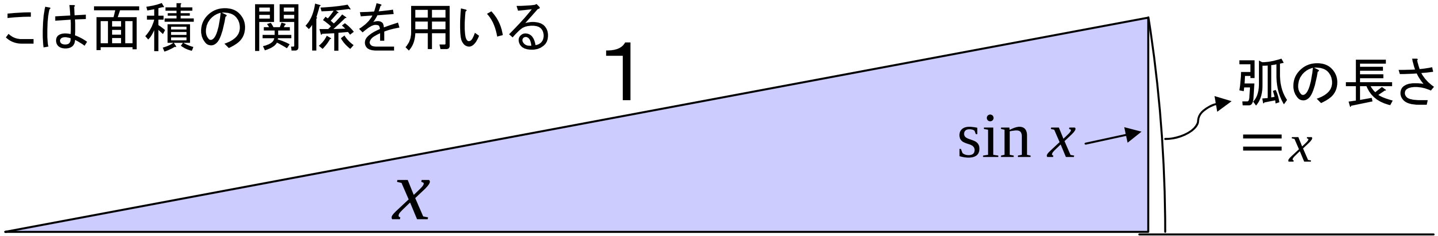
重要な極限（2）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



下図の直角三角形の「高さ」と「円弧」が同じ大きさになる。

証明には面積の関係を用いる



関数が連続

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- **1点で連続**
  - 極限値が存在する
  - その点で関数が定義されている
  - 極限値と関数値が等しい

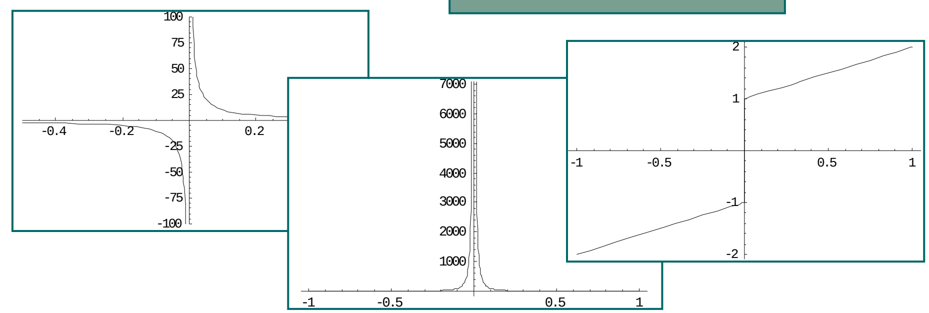
- **区間内の<u>どの点でも</u>連続**
  - その区間内のグラフが「一筆書(ペンを紙から話さない)」で描ける
  - 尖っていてもよい
  - 閉区間の端も「連続」という約束

一点で不連続

区間内のいたるところで
不連続ということもある

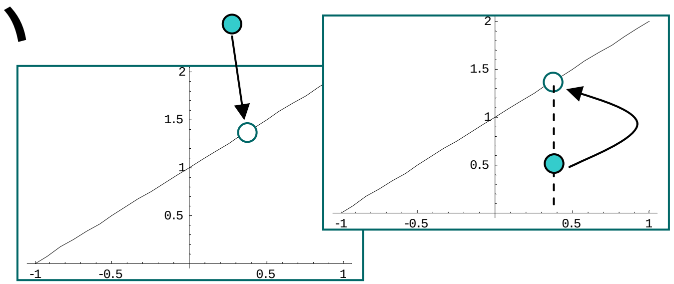
- 極限値が無い
  - 発散
  - 左右の極限が不一致

どうにもならない



- 極限値が在る
  - 関数値が定義されていない
  - 極限値と関数値が異なる

取り除ける不連続点： 関数値を
定義しなおせば連続になる



区間内で連続な関数の特徴

- 閉区間内で連続
  - 定義域の連続性（実数の性質）が値域における連続性を生じる
  - その区間内で関数値に有限の大きさの最大と最小がある
  - 中間値の定理
    - 解を求めるアルゴリズム「2分法」