不定積分

用語
不定積分と微分方程式の一般解/特殊解
不定積分の基本公式

原始関数（用語） antiderivative

- $F(x)$が$f(x)$の変域全体で$F'(x)=f(x)$なる関係を満たすとき，これをfの**原始関数**という。
- $f(x)$の原始関数のすべてをあわせて$f(x)$のxに関する**不定積分**といい$\int f(x)\,\mathrm{d}x$で表す。
- $\int$は**積分記号**であり$f(x)$は**被積分関数**，xは**積分変数**という。

積分定数と初期値問題

- 関数のグラフについて，「傾き」と「通過する1点」が与えられたとき，関数を決定

$y=f(x)$ のグラフの傾きが$3x^2$。グラフは$(1,-1)$を通る。

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=3x^2$ ：微分方程式（differential equation）

$y(1)=-1$ ：初期条件（initial condition）

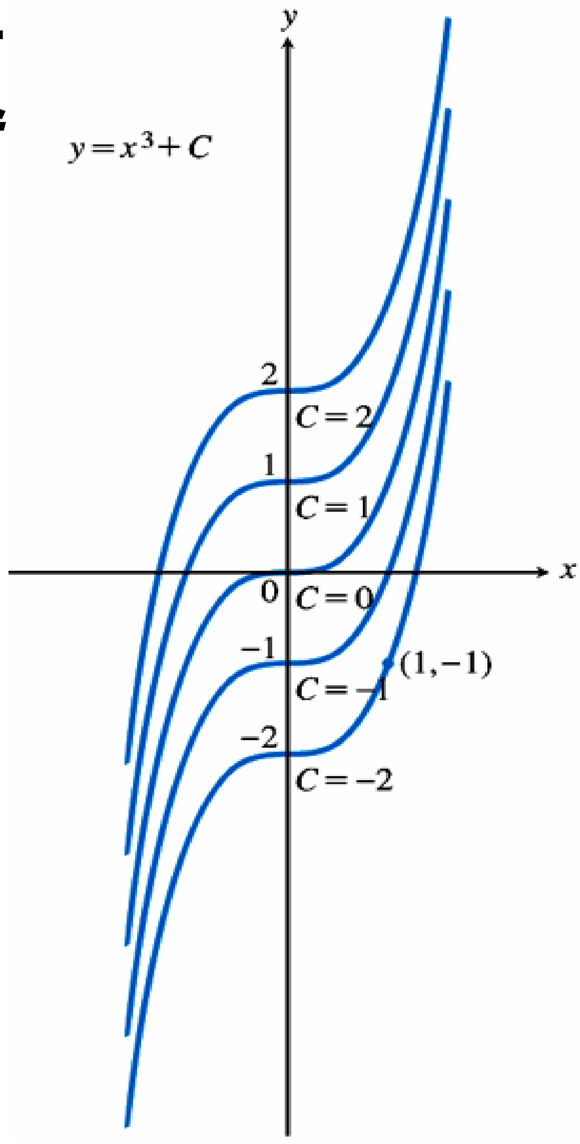
$\displaystyle\int \frac{dy}{dx}dx=\int 3x^2 dx$

$y+C_1=x^3+C_2$ ：C_1, C_2は積分定数（constants of integration）

$y=x^3+C$ ：一般解（general solution）

$-1=1+C \Rightarrow C=-2$

$y=x^3-2$ ：特（殊）解（particular solution）



積分公式
Integration formulas

- 基本ルール

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$: 原始関数の定義，積分結果の正否確認は簡単。

$\int F'(x)dx = F(x) + C$: 同じく定義，何を微分したか知っていれば…

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$: 両辺を微分してみよ。

$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

- そこから先は記憶とテクニックの世界

基本公式

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

積分の式変形(置換積分) substitution

- **合成関数の微分＝鎖則**

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$u = g(x),\ du = g'(x)dx$$

例題

$$\int x^2 \sin(x^3)\ dx = \int \sin(x^3)\, x^2 dx = \int \sin u \frac{1}{3} du : u = x^3$$

$$= -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

$$\int \frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} : u = z^2 + 1, du = 2zdz$$

$$= \frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$

積分の式変形(置換積分の応用)

$$F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

$$\int \left(f(x)\right)^n f'(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left(f(x)\right)^{n+1} + C \cdots n \neq -1 \\ \ln\left|f(x)\right| + C \qquad \cdots n = -1 \end{cases}$$

例題 $$\int \cos(7x+5)dx = \frac{1}{7}\sin(7x+5) + C$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \left(x^2+1\right)^{-1/2}\left(\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\right)dx = \frac{1}{1-(1/2)}\left(x^2+1\right)^{1-1/2} + C$$
$$= 2\sqrt{x^2+1} + C$$

部分積分
integration by parts

- 関数の積の微分
  - 既知の積分に持ち込む

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)=\frac{df}{dx}\cdot g+f\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$f\cdot g=\int\left(\frac{df}{dx}\cdot g\right)dx+\int\left(f\cdot\frac{dg}{dx}\right)dx$$

$$\int\left(f\cdot\frac{dg}{dx}\right)dx=f\cdot g-\int\left(\frac{df}{dx}\cdot g\right)dx$$

例題

$$\int x\cos x dx$$

$$=x\sin x-\int\sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

$f(x)=x$　　$g'(x)$ = cos x

$$\int xe^{-x}dx$$

$$=x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

部分分数分解(積分に利用) partial fraction

- 例題

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

$$6x+7=A(x+2)+B=Ax+(2A+B)$$

$$A=6,B=-5$$

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)}+\frac{-5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$$

$$-2x+4=(Ax+B)(x-1)^2+C(x-1)(x^2+1)+D(x^2+1)$$

$$=(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2$$

$$+(A-2B+C)x+(B-C+D)$$

$$\left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B+C=-2 \\ B-C+D=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A=2,B=1,C=-2,D=1$$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

- 理論の詳細はHP参考

現実世界とのかかわり

- 速度から位置を求める
- 加速度から速度を求める
- 力から速度や位置(運動)を求める
- グラフから長さ，面積，体積を求める