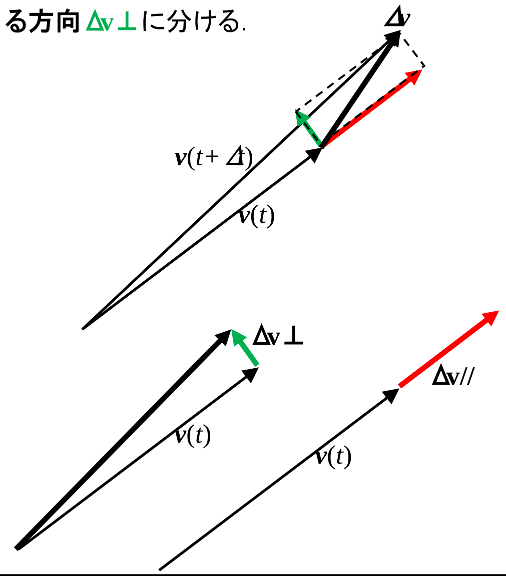
なめらかな曲線上のある点でその曲線に接する円を「その点における曲率円」という. 曲線上を移動するとき, 各瞬間はその円の半径(曲率半径という)で円運動をしていると考えるわけである. ここで微分法を用いて曲率半径を求めることにする.

その前に, 曲率円を考えることの力学的な裏付けを復習しておく. 曲線上を運動する質点の速度ベクトルの変化(したがって加速度)を, 「向きの変化分」と「大きさの変化分」に分解して考える. 向きの変化分は大きさが変わらず, 大きさの変化分は向きが変わらない. この2つの変化分の向きは直交する. 速度の大きさが変わらず向きが変化するのは等速円運動, 向きが変わらないのは直線運動である. どんな場合も速度の向きが曲線の接線の方向と一致するので, 加速度を曲線の接線方向と法線方向に分解することになる. 法線方向の加速度は, 曲率円上をその瞬間の速さで等角速度で運動するときの加速度となる. 曲率半径と速度の大きさがわかれば, 法線方向の加速度がわかる.

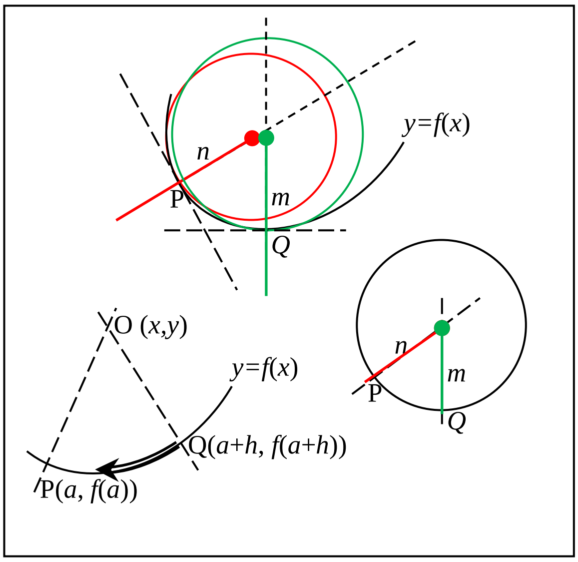
微小な時間 Δt の間に生じる**速度ベクトルの変化 Δv** を, **速度の方向 Δv//** とそれに**直交する方向 Δv⊥** に分ける.



$y = f(x)$ のグラフが注目する曲線であるとしよう. この曲線上の点 P における曲率円の中心は P における法線 n 上にある. P と異なる Q における曲率円の中心も Q における法線 m 上にある.

もし曲線が円だとすると, n と m の交点が円の中心である.

曲線が円ではないとき, P と Q を接近させると PQ の間の曲線が曲率円の一部に見えてくる: n と m の交点 O は曲率円の中心に近づく.



こうして Q→P の極限における2つの法線の交点の位置を求めればよいことがわかる. 実際,

P(a, $f(a)$),　Q($a+h$, $f(a+h)$) とおき $h \to 0$ とする.

P における法線の式:　　① $y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

Q における法線の式：　② $y-f(a+h)=\dfrac{-1}{f'(a+h)}\left(x-(a+h)\right)$

①と②の交点の x 座標を求めるため ①－② をつくる：

③ $$f(a)-f(a+h)=\left(\frac{1}{f'(a+h)}-\frac{1}{f'(a)}\right)(x-a)-\frac{h}{f'(a+h)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{f(a)-f(a+h)}{h}+\frac{1}{f'(a+h)}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f'(a+h)}-\frac{1}{f'(a)}\right)(x-a)$$

$h \rightarrow 0$ の極限をとる：

$$\frac{f(a)-f(a+h)}{h}\rightarrow f'(a)$$

$$\frac{1}{f'(a+h)}\rightarrow\frac{1}{f'(a)}$$

$$\boxed{f'+\frac{1}{f'}=-\frac{f''}{\{f'\}^2}(x-a)}$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f'(a+h)}-\frac{1}{f'(a)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)_{x=a}=\frac{-f''(a)}{\left[f'(a)\right]^2}$$

$$-\left(f'+\frac{1}{f'}\right)\frac{\{f'\}^2}{f''}=\boxed{-\frac{f'}{f''}(\{f'\}^2+1)=(x-a)} \qquad ④$$

①と④から

$$\boxed{y-f(a)=\frac{1}{f'}\frac{f'}{f''}(\{f'\}^2+1)=\frac{1}{f''}(\{f'\}^2+1)} \quad ⑤$$

④と⑤から，曲率半径は

$$R=\sqrt{(x-a)^2+(y-f(a))^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{-f'}{f''}\left(\{f'\}^2+1\right)\right]^2+\left[\frac{1}{f''}\left(\{f'\}^2+1\right)\right]^2}$$

$$=\left|\frac{1}{f''}\left(\{f'\}^2+1\right)\right|\sqrt{\{f'\}^2+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\{f'\}^2+1}\right)^3}{|f''|}$$

例題：初速度が水平方向にV，垂直方向にUで射出された物体が重力加速度 g のもとで運動する．
初期位置を原点とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0\rightarrow\frac{dx}{dt}=V\rightarrow x=Vt,\quad\frac{d^2y}{dt^2}=-g\rightarrow\frac{dy}{dt}=-gt+U\rightarrow y=-\frac{g}{2}t^2+Ut$$

$$y=-\frac{g}{2V^2}x^2+\frac{U}{V}x=-\frac{g}{2V^2}\left(x^2-\frac{2UV}{g}x\right)=-\frac{g}{2V^2}\left(x-\frac{UV}{g}\right)^2+\frac{U^2}{2g}$$

軌道の頂上で，2階微分係数は（放物線なので実は頂上でなくても同じ値となるが）$y''=-\frac{g}{V^2}$，頂上だから $y'=0$，これから曲率半径を求めると

$$R=\frac{V^2}{g}$$

である．これを書きなおして

$$\frac{V^2}{R}=g$$

とすれば，半径 R の円周上を速さ V で運動する点の加速度の式である．放物線の頂上では水平方向に初速度Vで運動している．この瞬間を円運動とみなしたときの加速度が重力加速度に一致する．事実，質点の加速度は常に重力加速度なのだ．

頂点以外で同様の作業をしようとすると，接線方向の加速度を考慮しないといけない．しかし，その場合も加速度は鉛直下向きで g となるはずだ．