微分方程式の作り方

- バクテリアの自己増殖
- 放射性同位元素の自然崩壊
- ロジスティックモデル
- 伝染病の広がり
- 単振動
- 様々な運動方程式

「常微分方程式」岩波書店，矢嶋信夫著

バクテリアの自己増殖

•1個のバクテリアが分裂をくりかえし，増殖する.
•どの1個を見ても，環境や個性に差がないとする.
•仲間の数が増えても，増殖の速さが変わらないとする.

時刻　tにおけるバクテリアの数：$n(t)$

$t \to t + dt$に増加した数：dn

増加率：$\dfrac{dn}{dt}$

$$\frac{dn}{n} = \mu dt$$

1個あたりの増殖率

比増殖率が一定：

$$\frac{dn}{dt}\frac{1}{n} = \mu$$

μ：マルサス係数

放射性同位元素の自然崩壊

- ある同位体元素に注目する
- どの原子にも差がない
- どの原子も崩壊する確率が一定

原子の総数：$n(t)$

崩壊率：γ

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n$$

ロジスティック·モデル

- バクテリアの自己増殖
- 仲間の数で環境が変化する
  - 増え難くなる:栄養不足, 環境汚染
  - 増えると増殖率が減る

$$\frac{dn}{dt} = \mu n$$

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{n}{K}\right)$$

$$\frac{dn}{dt} = \mu_0 \left(1 - \frac{n}{K}\right) n$$

$n < K$ の間は $\dfrac{dn}{dt} > 0$ で増加する

$n = K$ では $\dfrac{dn}{dt} = 0$ で増加が止まる

$n > K$ ならば $\dfrac{dn}{dt} < 0$ で減少する

伝染病の広がり

- 感染者が少なければ広がらない
- 感染者が多すぎると（感染してない人が少なくなり）広がらない

地域の人口$:N$

未感染者数$:x$

感染者数$:(N-x)$

感染者と未感染者の接触により

確率的に感染： $\beta x(N-x)$

$$\frac{dx}{dt}=-\beta x(N-x)$$

単振動

- ニュートンの運動方程式
- 復元力の性質

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F(x) = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -F(x) \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{m} \end{cases}$$

いろいろな運動方程式（1次元）

等速直線運動： $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$

等加速度運動： $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F(\text{一定})$

速度に比例する抵抗：$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}+F$

ex) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\dfrac{dx}{dt}-kx$

ex) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\dfrac{dx}{dt}-mg$

微分方程式の解き方

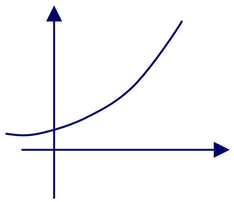
$$\frac{dn}{dt} = \mu n$$

$$\frac{dn}{n} = \mu dt$$

$$\int \frac{dn}{n} = \int \mu dt$$

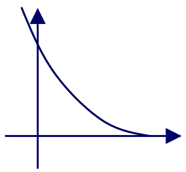
$$\ln n = \mu t + c$$

$$n(t) = N_0 e^{\mu t}$$



$$\frac{dn}{dt} = -\gamma dt$$

$$n(t) = N_0 e^{-\gamma t}$$



$$\frac{dn}{dt} = \mu\left(1 - \frac{n}{K}\right)n$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{n}{K}\right)n}\frac{dn}{dt} = \left\{\frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{n}{K}} + \frac{1}{n}\right\}\frac{dn}{dt} = \mu$$

$$\frac{dn}{K - n} + \frac{dn}{n} = \mu dt$$

$$-\ln(K - n) + \ln n = \mu t + C$$

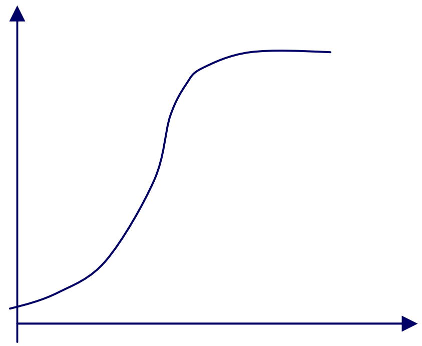
$$\ln\frac{n}{n - K} = \mu t + C$$

$$\frac{n}{n - K} = De^{\mu t}$$

$$\frac{n_0}{n_0 - K} = D,$$

$$n = \frac{-DKe^{\mu t}}{1 - De^{\mu t}} = \frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t} - \left(\frac{K}{n_0 - 1}\right)}$$

$$= \frac{n_0 K e^{\mu t}}{n_0 e^{\mu t} - K + n_0}$$



用語

- 階数(order):微分方程式に含まれる導関数の最高階数 $F(x,y,y',...,y^{(m)})=0:m$階
- 次数(degree):最高階の導関数の次数 $(y'')^2+y^6=0:2$次
- 線形(linear):すべての導関数と関数の次数が1 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x):2$階線形微分方程式
- 独立変数，従属変数(未知変数)
- 常微分方程式，偏微分方程式

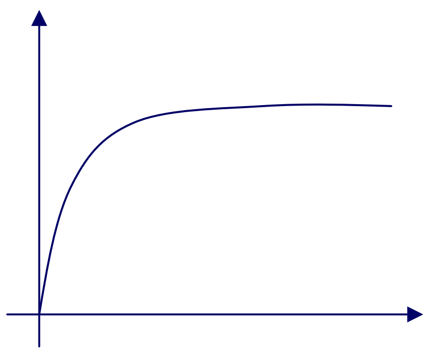
- 解:微分方程式を満たす関数
  - 解を求める，解く，積分する
- **一般解**:任意定数を決定しない状態の解(すべての解を表す)
- **特解(特殊解)**:任意定数に特定の値を代入したもの
- **初期値問題**:任意定数をある点において決定し特解を求める
  - **初期条件**，初期値問題の条件
- 解の一意性:初期条件を与えると解がただひとつ決まる
  - 解が一意でないことも，存在しないこともある

初等解法:変数分離

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$$

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx + C$$

- 積分を実行する
  - 参考書を見る
  - 計算機で数値的に解を求める



練習:

化学反応 $A + B \to C$

反応速度定数 k

$t = 0$ における濃度はA, BともにN

tにおけるCの濃度 xを求める

tにおいて, A, Bの濃度は$(N - x)$

Aの分子とBの分子が衝突すると,

ある確率でCができる. 衝突する

確率はそれぞれの濃度に比例する

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)^2$$

$$\int \frac{dx}{(N - x)^2} = kt + C$$

$$x(t) = \frac{N^2 kt}{1 + Nkt}$$

初等解法:同次型

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$y = xu$　　または　$\dfrac{y}{x} = u$　とおく

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

練習:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

$$y = ux,\ f(u) = -\frac{1}{u}$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du = -\ln|x| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1)$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) + \ln|x| = C$$

$$(u^2 + 1)\cdot x^2 = K > 0$$

解は同心円:$x^2 + y^2 = r^2$

スケーリング:
両軸の尺度を同次に変えたとき，微分方程式は不変.

解は原点を相似の中心とする図形群となる.

1階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)=0$$

$q(x)=0$:斉次

$\dfrac{dz}{dx}+p(x)z=0$　変数分離型

$\dfrac{dz}{z}=-p(x)dx$

$\ln|z|=-\int p(x)dx+C$

$z(x)=A\cdot e^{-\int pdx}$

$q(x)\neq 0$:　すなわち非斉次のとき

$A\to a(x)$　としてみる(定数変化法)。

$\Leftrightarrow y=a(x)z(x)$　とおく。

　斉次解 : $z(x)=e^{-\int p(x)dx}$

　積分定数は$a(x)$に繰り込む:$z(0)=1$

$y'=az'+a'z=a(-pz)+a'z=-py+a'z$　を

$y'+py=-q$　に代入すると$\dfrac{da}{dx}=-\dfrac{q(x)}{z(x)}$。

これは解ける！　$a=-\int\dfrac{q}{z}dx+C$

$$y=Cz-z\int^{x}\frac{q(x')}{z(x')}dx'$$

練習:空気抵抗を受ける自由落下

速度について運動方程式 :$\dfrac{dv}{dt}+\gamma v-g=0$

斉次解は$g=0$とおいて　$z=e^{-\gamma t}$

$$\frac{da}{dt}=-\left(\frac{-g}{e^{-\gamma t}}\right)=ge^{\gamma t}$$

$$\Rightarrow a=\int ge^{\gamma t}dt+C=\frac{g}{\gamma}e^{\gamma t}+C$$

一般解は$v=az=\dfrac{g}{\gamma}+Ce^{-\gamma t}$

初期条件が$v=0$なら, $C=-\dfrac{g}{\gamma}$

$$v=\frac{g}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$$

完全微分型方程式

$$df = \frac{\partial f}{dx}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

多変数の微分量dfが，通り道によって値を変えるとき，完全微分ではないという.

- 熱の出入りと仕事の授受があるときのエネルギー保存(原子数固定の系)
  - dU=d’Q－d’W,　d’ は不完全微分であることを示す記号
  - dUは完全微分（Uが状態量である），dU=(3R/2)dT, dU/Tも完全微分は明らか
  - PV＝nRT
  - d’W=PdV=(nRT/V)dV, d ‘T/T=nRdV/Vは完全微分
  - d’Q/Tも完全微分

$$-ydx + xdy = 0$$

$P = -y,\ Q = x \Rightarrow P_y = -1, Q_x = 1 \Rightarrow$ 不完全

$\dfrac{-1}{y^2}$をかけると($\dfrac{1}{xy}$をかけてもよい)

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \Rightarrow exact$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}dx + xd\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

定係数線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x)$$

斉次解

$$y=Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x},\quad y=(A+Bx)e^{\lambda x}$$

λ,μは特性方程式 $z^2+az+b=0$の解

非斉次解と斉次解の線形結合

微分方程式から差分方程式へ

- 未完