予備知識

- 線形斉次微分方程式 $$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$ $$a_k(x),k=0,\cdots n-1$$

- 線形非斉次微分方程式 $$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

- 微分作用素 L
  - 線形性

$$L(y)=y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y$$
$$L(y)=0,\qquad L(y)=f(x)$$
$$\Rightarrow L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)$$

$\downarrow$

n個の解および任意の定数$y_k(x),c_k$に対し
$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$
も解になる

一般解の自由度

- 1階の微分方程式の解は定数を1つ含む。
  - 1階導関数を積分によりもとの関数にもどす
  - 積分定数が1個
- 2階のときは2つ含む。
  - 2階導関数をもとの関数にもどすのに2回積分する
  - 積分定数が2個

- n階の微分方程式
  - n 個の積分定数
  - 係数はn個
  - 1次独立なn個の解の線形結合が一般解。
  - 1次独立な解とは，それらの線形結合が0なら係数が0以外となるもの。

特殊解　＋　一般解

- 斉次方程式の一般解を求める
- 非斉次方程式の1つの特殊解を見つける
- 両者を加えると，非斉次方程式の一般解

$$L(y_s) = f$$
$$L(y_h) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$L(y_h + y_s) = f$$

もしy_sと異なる特解y_tを新たに発見したなら

$$L(y_t) = f \Rightarrow L(y_t - y_s) = L(y_t) - L(y_s) = f - f = 0$$

となる。すなわち$y_t - y_s$は斉次解である。

いつでも$y_t = (y_t - y_s) + y_s$と書けるので，

新たな特解y_tは，斉次解$(y_t - y_s)$と以前の

特解y_sの和であり，実は$y_h + y_s$と同じもの。

定係数斉次方程式 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

- 簡単に解ける場合 $\dfrac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}$の形の解を探す

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)e^{\lambda x} = 0$$

- 特性方程式
  - 全て異なる根のとき

$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$の根$\lambda_k$

$\left\{e^{\lambda_k x}; k = 1, \cdots, n\right\}$ は線形独立

よって一般解は $\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}$

証明は次

$e^{\lambda_k x}$が線形独立

$e^{\lambda_i x}$が線形独立であること：

$$\sum_i c_i e^{\lambda_i x} = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

$\sum_i c_i e^{\lambda_i x} = 0$ を $k(=0,1,\ldots n)$回微分し

$x = 0$とおき

$$\begin{aligned} c_1 \quad + c_2 \quad + \cdots + c_n \quad &= 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n &= 0 \\ c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

からc_iが0となることをいう。

i番目のc_iに注目して

$$p_i(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\underset{i}{\vee}\cdots(x-\lambda_n)$$

とおけば $p_i(\lambda_j) = 0\ (j \neq i),\ p_i(\lambda_i) \neq 0$だから

$$\sum_{j=1,n} c_j p_i(\lambda_j) = c_i p_i(\lambda_i)$$

ところが任意の多項式$p(x) = \sum_{k=1,n} b_k x^k$に対し

$$\sum_{i=1,n} c_i p(\lambda_i) = \sum_i c_i \sum_k b_k \lambda_i^k = \sum_i \sum_k b_k c_i \lambda_i^k$$

$$= \sum_k b_k \sum_i c_i \lambda_i^k = 0$$

だから$\sum_i c_i \lambda_i^k = 0$ならば

$$\sum_{j=1,n} c_j p_i(\lambda_j) = c_i p_i(\lambda_i) = 0 \text{より } c_i = 0$$

定係数線形斉次(重根)

例題

$y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0, \quad (\lambda - a)^3 = 0$

$y^{(n)} = 0$の解はよく知られている

$c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1}$

特性方程式は$\lambda^n = 0$で重複度nの根

$y = e^{ax}u(x)$とおくと

$y' = ae^{ax}u + e^{ax}u' = e^{ax}(au + u')$

$y'' = ae^{ax}(au + u') + e^{ax}(au' + u'') = a^2e^{ax}u + 2ae^{ax}u' + e^{ax}u''$

$= e^{ax}\left(a^2u + 2au' + u''\right)$

$y''' = ae^{ax}\left(a^2u + 2au' + u''\right) + e^{ax}\left(a^2u' + 2au'' + u'''\right)$

$= e^{ax}\left(\left(a^3u + 2a^2u' + au''\right) + \left(a^2u' + 2au'' + u'''\right)\right)$

$= e^{ax}\left(a^3u + 3a^2u' + 3au'' + u'''\right)$

$\left(a^3u + 3a^2u' + 3au'' + u'''\right) - 3a\left(a^2u + 2au' + u''\right) + 3a^2(au + u') - a^3u = u''' = 0$

$y = e^{ax}\left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)$

定係数線形斉次(微分作用素)

- 微分作用素
  - 定義
  - 性質
    - 線形
    - 可換
    - 定係数線形斉次
  - 例題

$$D_a y \equiv y' - ay$$

$$D_b D_a y = (y' - ay)' - b(y' - ay)$$

$$= y'' - (a+b)y' + aby = D_a D_b y$$

特性方程式$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$

をもつ微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad D_{\lambda_1} D_{\lambda_2} \cdots D_{\lambda_n} y = 0$$

$$D_a^3 y = y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0$$

$$D_a(e^{ax}u) = (e^{ax}u)' - a(e^{ax}u)$$

$$= ae^{ax}u + e^{ax}u' - a(e^{ax}u)$$

$$= e^{ax}u'$$

$$D_a^2(e^{ax}u) = e^{ax}u''$$

$$D_a^3(e^{ax}u) = e^{ax}u'''$$

要するに

$$D_a^3 y = 0$$

$$\downarrow$$

$$D_a^3(e^{ax}u) = e^{ax}u''' = 0$$

$$\downarrow$$

$$u''' = 0$$

特性方程式が

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

と因数分解できるなら

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x}+p_2(x)e^{\lambda_2 x}+\cdots+p_k(x)e^{\lambda_k x}$$

が一般解である

$\sum_{i=1,k} m_i = n$個の積分定数

$p_i:(m_i-1)$次多項式

- 例:

$$(\lambda-a)^3(\lambda-b)^4$$

$$D_a^3 D_b^4 y=0 : D_b^4 y=0 : y_b=e^{bx}\left(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3\right)$$

$$D_b^4 D_a^3 y=0 : D_a^3 y=0 : y_a=e^{ax}\left(c_5+c_6x+c_7x^2\right)$$

$$y=y_a+y_b$$

$$D_a^3 D_b^4\left(y_a+y_b\right)=D_a^3\left(D_b^4\left(y_a\right)+D_b^4\left(y_b\right)\right)$$

$$=D_a^3\left(D_b^4\left(y_a\right)+0\right)=D_a^3 D_b^4\left(y_a\right)=D_b^4 D_a^3\left(y_a\right)=D_b^4 0=0$$

$$L(y) = f$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

の非斉次解を1つ見つける

- 線形性 $L(y_1) = f_1, L(y_2) = f_2 \Rightarrow L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1f_1 + c_2f_2$
  - 非斉次項を分解して解を求める

    $x^j, e^{ax}, e^{ax}\sin\omega x$などの線形和
- fが定係数線形斉次微分方程式の解のとき
  - 非斉次項と同じ構造をもつ解を探す
    - 非斉次項が従う微分作用素$L_f(f)=0$
    - 方程式は$L(y)=f \Rightarrow L_f\, L(y)= LL_f\,(f)=0$