狩野

部分分数への展開

1. 多項式 $P(x), Q(x)$ による有理式R(x)=P(x)/Q(x)の積分を求めるには，部分分数展開を用いる．その手順を以下に示す．
2. $P(x)$ の次数が $Q(x)$ の次数と等しいか大きければ，式の割り算を実行する．

   $R(x)=P(x)/Q(x)=S(x)+\hat{P}(x)/Q(x)$ となる．ただし，$\hat{P}(x)$ の次数は $Q(x)$ の次数より小さい．
3. 定理：

   複素数までの範囲で，$Q(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}$ と書ける．

   （$Q(x)$ を因数分解．）
4. 定理：

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{P}(x)}{Q(x)} &= \frac{C_{11}}{(x-\alpha_1)}+\frac{C_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\frac{C_{13}}{(x-\alpha_1)^3}+\cdots+\frac{C_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} \\
&\quad +\frac{C_{21}}{(x-\alpha_2)}+\frac{C_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\frac{C_{23}}{(x-\alpha_2)^3}+\cdots+\frac{C_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +\frac{C_{k1}}{(x-\alpha_k)}+\frac{C_{k2}}{(x-\alpha_k)^2}+\frac{C_{k3}}{(x-\alpha_k)^3}+\cdots+\frac{C_{km_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{C_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}
\end{aligned}
$$

   となる C_{ij} が存在する．

5. α_1 に注目し
   $Q(x)=q_1(x)\cdot(x-\alpha_1)^{m_1}$，$q_1(\alpha_1)\neq 0$
   とする．

6. $\hat{P}(x)-\dfrac{\hat{P}(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)}q_1(x)$ を作ると，$\hat{P}(\alpha_1)-\dfrac{\hat{P}(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)}q_1(\alpha_1)=0$ となるから，$(x-\alpha_1)$ で割り切れる．すなわち $\hat{P}(x)=\dfrac{\hat{P}(\alpha_1)}{q(\alpha_1)}q_1(x)+p_1(x)(x-\alpha_1)$．

7. 以上をまとめると

$$\frac{\hat{P}(x)}{Q(x)} = \frac{\hat{P}(x)}{q_1(x)\cdot(x-\alpha_1)^{m_1}} = \frac{\hat{P}(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)}\frac{1}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)\cdot(x-\alpha_1)^{m_1-1}}$$
$$= \frac{C_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)\cdot(x-\alpha_1)^{m_1-1}}$$

8. 右辺第二項 $\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)(x-\alpha_1)^{m_1-1}}$ に対して, ふたたび 5 および 6 の手順が適用可能である.

すなわち $Q_1(x) = q_1(x)(x-\alpha_1)^{m_1-1}$ とおけば,

$$\frac{\hat{P}(x)}{Q(x)} = \frac{C_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)(x-\alpha_1)^{m_1-1}}$$
$$= \frac{C_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{C_{1m_1-1}}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}} + \frac{p_2(x)}{q_1(x)(x-\alpha_1)^{m_1-2}}$$

9. この作業をつづけると

$$\frac{\hat{P}(x)}{Q(x)} = \frac{C_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{C_{1m_1-1}}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{C_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{p_{m_1}(x)}{q_1(x)}$$

を得る.

10. $Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}$ および $Q(x) = q_1(x)\cdot(x-\alpha_1)^{m_1}$ だから

$q_1(x) = q_2(x)\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}$ と書ける. そこで

$$\frac{p_{m_1}(x)}{q_1(x)} = \frac{p_{m_1}(x)}{(x-\alpha_2)^{m_2}q_2(x)}$$

に対して全く同様の手順で計算すれば

$$\frac{p_{m_1}(x)}{q_1(x)} = \frac{C_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + \frac{C_{2m_2-1}}{(x-\alpha_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{C_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{p_{m_2}(x)}{q_2(x)}$$

11. こうして全ての因子 $(x-\alpha_1),(x-\alpha_2),\cdots,(x-\alpha_k)$ についての作業を完了すれば 4 の定理が証明される.