１．

（１） $\int_0^1\int_1^2 dxdy,\quad \int_1^2 dx=(2-1)=1,\ \int_0^1\int_1^2 dxdy=\int_0^1 1dy=1$

（２） $\int_0^4 (x+y)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+yx\right]_{x=0}^4 =8+4y$

$\int_1^2\left(\int_0^4 (x+y)dx\right)dy=\int_1^2 (8+4y)\,dy=\left[8y+2y^2\right]_1^2=(16+8)-(8+2)=14$

（３） $\int_{x^3}^{x} dy=[y]_{y=x^3}^{x}=x-x^3,\quad \int_0^1\left(\int_{x^3}^{x} dy\right)dx=\int_0^1 (x-x^3)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

（４） $\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydy=x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}x(a^2-x^2)$

$\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydy\right)dx=\int_0^a\frac{1}{2}x(a^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^a=\frac{a^4}{8}$

（５） $\int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2} xdy\right)dx=\int_0^1 x[y]_{y=x^3}^{x^2}dx=\int_0^1 x(x^2-x^3)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]=\frac{1}{20}$

$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} xdx\right)dy=\int_0^1\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y^{2/3}-y\right)dy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2/3)+1}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{20}$

２．略

３．

被積分関数の様子を観察すると、積分の端にあたる原点で無限大に発散している。
さらに、ｘ軸に（y=0）沿って原点に近づくとき被積分関数は $1/x^2$ で正で発散するが、y軸にそって原点に近づくときには$-1/y^2$ となって負で発散する。このような場合（広義の）多重積分が存在しない可能性がある。(積分領域外ではあるが、x＝－y であれば、無限大に発散している。）一見すると、ｘとｙを入れ替えると被積分関数は符号が反転するし、積分領域が y=x について対称だから、積分が 0 になるように思えるかもしれないが、この場合にはあいにくそうならない。分母が三乗でなく二乗であれば広義積分は（運良く）０になり積分が定義できる。注意が必要である。

４．

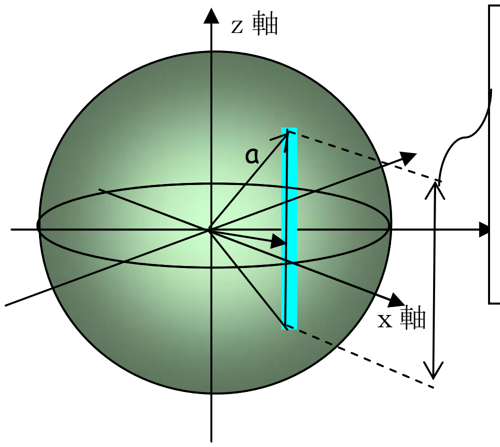
（１）$\int_0^1\int_1^2\int_2^3 dzdydx = \int_0^1\int_1^2 (3-2)dydx = \int_0^1 (2-1)dx = 1$ ：一辺の長さが１の直方体の体積

（２）

$$\int_0^{xy} dz = xy - 0 = xy,\quad \int_{x^2}^{x} xydy = x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{x} = \frac{1}{2}(x^3 - x^5),\quad \int_0^1 \frac{1}{2}(x^3 - x^5)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}$$

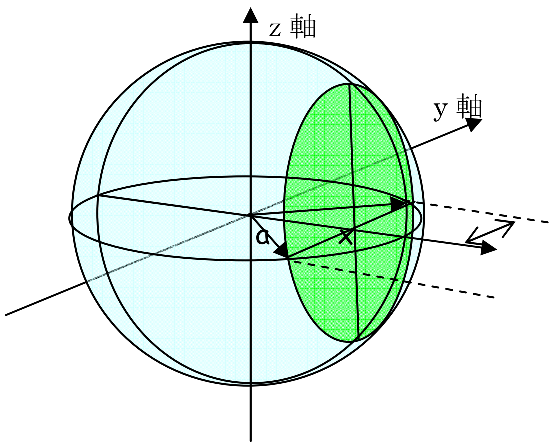
この 3 重積分は、ｚについての積分を終了した段階が $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xydydx$ となっているので、関数 xy を y=x と y＝x^2 で囲まれた領域で積分することに等しい。

（３）略解の内容を図解すると次のようになる：



ｘとｙを一定としｚで積分するとき（その点を通過するｚ軸方向の線分が領域に入る条件は）ｚが $\pm\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$ の範囲となる。この棒の体積は

$2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}dxdy$



上の棒を、ｘの値を一定にして、ｙ方向に動かすと、領域に入る部分は円板となる。ｙが動く範囲は $\pm\sqrt{a^2 - x^2}$。この範囲を動くとき，棒の長さは上で決めた長さとなるから，自動的に伸縮している。この円板の体積は

$$\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}dy\right)dx$$

最後に，この円板をｘ軸方向に動かして球とする。