用語の解説

密度：

- 体積 V の中に質量 M が含まれているとき、M/V を密度という。密度は、どれほど「ぎっちり」と詰まっているかを表す量である。同じ体積でも密度が大きければ質量は大きい。
- 密度という用語は物理現象にかぎらず用いられる。たとえば人口密度は、ある面積に含まれる人口を、その面積で割ったものである。
- 物体の密度が場所によらずどこでも同じとき、「密度が均一である」とか「密度が一様である」と言う。
- 密度が均一でないときは、場所によりその値が異なる。密度がなめらかに変化すると仮定すれば、ある点 r の密度を $\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta M}{\Delta V}$ で定義することができる。

重心：

- 物体の重心とは、地上でその物体を１点で支えて釣り合わせる（回転もしない）ことのできる点である。
- １個の点からなる物体なら、その点が重心。
- ２個の点からなる物体なら、てこの原理を考えれば、２点を結ぶ線分を質量の比で逆に内分した点。$\mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$。
- ３点以上は、$\mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$
- 質量を密度で表そう。その質量を完全に取り囲む微小な体積を *dxdydz* とすれば、$m_1 = \rho(\mathbf{r}_1)dxdydz$ である。

$$m_1 + m_2 + \cdots = \sum_{k=1,N} m_k = \sum_{k=1,N} \rho(\mathbf{r}_k)dxdydz = \int_V \rho(\mathbf{r})dxdydz$$

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots = \sum_{k=1,N} m_k\mathbf{r}_k = \sum_{k=1,N} \rho(\mathbf{r}_k)\mathbf{r}_k dxdydz = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dxdydz$$

$$= \left(\int_V \rho(x,y,z)x\ dxdydz,\ \int_V \rho(x,y,z)y\ dxdydz,\ \int_V \rho(x,y,z)z\ dxdydz \right)$$

よって

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dxdydz}{\int_V \rho(\mathbf{r})dxdydz} = \left(\frac{1}{M}\int_V \rho(x,y,z)x\ dxdydz,\ \frac{1}{M}\int_V \rho(x,y,z)y\ dxdydz, \frac{1}{M}\int_V \rho(x,y,z)z\ dxdydz \right)$$

慣性モーメント（慣性能率）

- ある軸のまわりに回転している物体は運動のエネルギーを持つ。
- 軸から距離ｒの位置にある物体（質量 m）が T の周期で回転している。

  速さは１周 2π r を周期 T で割り、v = 2π r/T = r ω（角速度：ω = 2π/T)。

  運動エネルギーは (1/2) m v^2 = (1/2) m r^2 ω^2
- 多数の物体が１つの軸のまわりに同じ角速度で回転するとき、各物体の運動エネルギーを単純に加算すると、全体の運動エネルギーとなる。どの物体も共通の角速度をもつから、全エネルギーは物体の形（軸を中心として質量がどのように分布するか）で決まる量と、角速度を用いて書き表すことができる。

  運動エネルギーは $E_K = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_k r_k^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

  ここに現れる I を物体の慣性モーメントという。

  $$I = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$
- 質量が連続的に分布し、軸上の一点Ｏから見た位置 **r** における密度ρ(**r**)が与えられているとする。回転軸をｚ軸にとれば、軸からの距離の二乗は $x^2 + y^2$ だから

  $$I = \int_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dxdydz$$

  である。
- 慣性モーメントを計算するには、物体を小さく分けて、各部分のモーメントを算出した上で総和をとればよい。このとき回転軸の位置を確認しておこう。

1．

（1）

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)\rho dxdydz=\int_{z=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{a}\left(\int_{x=0}^{a}(x^2+y^2)\rho dx\right)dy\right)dz$$

$$=\rho\int_{z=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{a}\left(\int_{x=0}^{a}(x^2+y^2)dx\right)dy\right)dz=\rho\int_{z=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{a}\left(\frac{1}{3}a^3+y^2a\right)dy\right)dz=\rho\int_{z=0}^{a}\left(\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{3}a^4\right)dz=\rho\frac{2}{3}a^5$$

$$M=\iiint_V \rho dxdydz=\rho a^3$$

$$I=\frac{2}{3}Ma^2$$

（2）

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)\rho dxdydz=\int_{z=0}^{h}\left(\iint_{r\le a}(x^2+y^2)\rho dxdy\right)dz$$

$$=\rho\int_{z=0}^{h}\left(\iint_{r\le a}r^2 rdrd\theta\right)dz=\rho\int_{z=0}^{h}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}r^3drd\theta\right)dz=2\pi\rho h\frac{1}{4}a^4$$

$$M=\pi a^2 h\rho$$

$$I=\frac{1}{2}Ma^2$$

（3）

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)\rho dxdydz=\int_{z=0}^{h}\left(\iint_{(x^2+y^2)\le z^2}(x^2+y^2)\rho dxdy\right)dz$$

$$=\rho\int_{z=0}^{h}\left(\iint_{(x^2+y^2)\le z^2}r^2 rdrd\theta\right)dz=\rho\int_{z=0}^{h}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{z}r^3drd\theta\right)dz=2\pi\rho\int_0^h\frac{1}{4}z^4dz=\frac{2\pi\rho}{20}h^5$$

$$M=\rho\int_{z=0}^{h}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{z}rdrd\theta\right)dz=2\pi\rho\int_0^h\frac{1}{2}z^2dz=\pi\rho\frac{h^3}{3}$$

$$I=\frac{3}{10}Mh^2$$

2．省略