問題４－３

[1]

Q.　　答えの言っていることは、、、積分の変数は何をとってもいいので、$a<b$ の時、最初は a の方から積和していく方法をとり、次に b の方から積和していく方法をとっているのですか？

A.　　そのとおりです。いわば x から t に変数を変換し、両者が逆向きに進むように設定しています。

Q.　　略解の内容を手短に言うとどういうことですか？

A.　　区間 $\Delta x$ を逆向きに番号付けすると同時に、区間内の点 $\xi$ も逆向きに番号付けをしているのが教科書 227 ページの上 2 行です。

リーマン和の総和記号 $\Sigma$ の中に入る $f(\xi_k)\ \Delta x_k$ に注目すると

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots$$

のように添え字がそろっています。ここで $\xi_k$ は区間 $\Delta x_k$ に含まれる点ですから、もし $\xi$ のほうに手を加えず x のほうだけ逆向きに順番をふり直すと

$$f(\xi_n)\,\Delta t_1 + f(\xi_{n-1})\,\Delta t_2 + \ldots$$

のようなことになってしまいます。これでも全く悪いというわけではありませんが、形式をそろえるには、区間 $\Delta t_1$ に含まれる点を $\xi'_1$ のように言い換えた方がよいでしょう。すなわち $x \to t$ の変換を行って座標軸を逆転したとき、それにあわせて $\xi$ の番号付けも逆転させるのが $\xi'_{k}=\xi_{n-k+1}$ の変換です。これが質問の答えになると思います。

Q.　　平均値の定理をつかって解いたのですが、それではダメですか？

A.　　$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$

となる c が開区間 $(a,b)$ の中に少なくとも１つ存在する。一方

$$(b-a) = -(a-b)$$

だから

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c) = -(a-b)\,f(c)$$

ここまでは納得しますが、その先が腑に落ちません。あなたの論旨は

$f(c)(b-a) = -f(c)(a-b)$ となり、

$f(c)(b-a) = f(c)(b-a)$ となるので、等式が成立。

$\int_{(a\to b)} f(x)dx = -\int_{(b\to a)} f(x)dx$ が証明された。

となっていますが、

$$\int_b^a f(x)\,dx = (a-b)\,f(c)$$

を前提にしないと、先に進むことはできないと思いますが、どうでしょうか？この逆向き

の積分に対する平均値の定理なるものは、逆向きの積分がもとの負になること、および、もとの積分のときと同じｃの値を使えることを主張するわけですが、これが自明なら、証明すべき命題も自明だと思います。もう一言言えば、証明すべき式を使っているような気がするのですが、私の思い違いでしょうか。

Q.　証明問題ではどのようなことを示していけば証明とみなされますか？

A.　人に見せる証明であれば、相手のレベルにあわせて、必要な基本までさかのぼります。そして論理を段階を踏んでつみあげて議論します。相手によって、論じる内容がことなってきます。自分のために証明するときは、ほんとうに分かればそれでＯＫでしょう。

Q.　シグマ記号が出てくると弱くなります。数列が基本的に苦手なので、見ると苦手意識が働いてしまうんです。

A.　総和記号は、慣れるまでは、書き下してみるとよいと思います。以下，ステップをおって練習の仕方を書いてみますから，読むだけでなく紙に書き取ってください。

$$S=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

と書いてあったときは、

$$\begin{aligned}S &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots \\ &\quad + f(\xi_k)\Delta x_k + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) \\ &\quad + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

と書き直してみるのです。そして，展開したままで

$$x_0 = t_n,\ x_1 = t_{n-1},\ \dots\ x_k = t_{n-k},\ \dots\ x_n = t_0$$

の置き換えをしましょう。つまり

$$\begin{aligned}S &= f(\xi_1)(t_{n-1} - t_n) + f(\xi_2)(t_{n-2} - t_{n-1}) \\ &\quad + f(\xi_k)(t_{n-k} - t_{n-k+1}) + \dots + f(\xi_n)(t_0 - t_1)\end{aligned}$$

です。ここで　$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$という記号を導入すると

$$\begin{aligned}t_{n-1} - t_n &= -(t_n - t_{n-1}) = -\Delta t_n \\ t_{n-2} - t_{n-1} &= -(t_{n-1} - t_{n-2}) = -\Delta t_{n-1} \\ t_{n-k} - t_{n-k+1} &= -(t_{n-k+1} - t_{n-k}) = -\Delta t_{n-k} \\ t_0 - t_1 &= -(t_1 - t_0) = -\Delta t_1\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}S &= f(\xi_1)(-\Delta t_n) + f(\xi_2)(-\Delta t_{n-1}) \\ &\quad + f(\xi_k)(-\Delta t_{n-k+1}) + \dots + f(\xi_n)(-\Delta t_1)\end{aligned}$$

$$= -[f(\xi_1)\Delta t_n + f(\xi_2)\Delta t_{n-1}$$

$$+ f(\xi_k)\Delta t_{n-k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta t_1]$$

$$= -[f(\xi_n)\Delta t_1 + \dots + f(\xi_k)\Delta t_{n-k+1} + \dots + f(\xi_1)\Delta t_n]$$

となります。ときどき総和記号を自分で使ってみることしましょう。

$\Delta t$ の添え字と $\xi$ の添え字をたすと $n+1$ になる（つまり変数を $x$ から $t$ に変えたとき，両者が「のぼり」と「くだり」に対応する）ように設定したのですからこの級数 $S$ の一般項は $f(\xi_{n-k+1})\ \Delta t_k$ と書くことができます。わかりにくければ

$$j = n - k + 1$$

という変数 $j$ を導入してもかまいません。そうすると $k = n-j+1$ ですから

$$f(\xi_k)\Delta t_{n-k+1} = f(\xi_{n-j+1})\Delta t_j$$

$k$ が $1$ から $n$ までの数を表すとき $j$ は $n$ から $1$ までを表します。

$$S = -[\Sigma_{j=n}^{1} f(\xi_{n-j+1})\Delta t_j]$$

総和記号は，普通，変数が小さいほうから大きいに向かって足すように書きます。一般に $a + b = b + a$ なのでどちらから足そうと，同じ値です。

$$S = -[\Sigma_{j=1}^{n} f(\xi_{n-j+1})\Delta t_j]$$

$j$ を別の記号で置き換えても，それが $1$ から $n$ まで変化するというのであれば，同じことなので，ここで $j$ を $k$ と書きます。

$$S = -[\Sigma_{k=1}^{n} f(\xi_{n-k+1})\Delta t_k]$$

となります。ところで，リーマン和の定義では，関数の変数 $\xi$ の添え字と，区間の幅 $\Delta t$ や $\Delta x$ の添え字が同じ方向に動くように書いたので，それにあわせるために，$\xi$ を別の呼び方にします。

$$\xi'_1 = \xi_n$$

$$\xi'_2 = \xi_{n-1}\dots$$

$$\xi'_k = \xi_{n-k+1}\dots$$

という関係の $\xi'$ を使えば

$$S = -[\Sigma_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\Delta t_k]$$

となります。ただし注意点は，このように定義した $\xi'_k$ が，たしかに区間 $\Delta t_k$ の内部の点であるということ（確認してください）。

ここで $n$ を∞に，各 $\Delta t$ を $0$ にもっていく極限をとると，リーマン和（記号を $\Delta x$ から $\Delta t$ に，$\xi$ から $\xi'$ に変えただけ，ただみかけの記号が変わっているだけなので，リーマン和の極限値が存在することは保証されますから）を定積分の記号で書くことができます。このとき $\xi'_k$ は，$k$ を $1$ から $n$ まで変えるとき，$b$ から $a$ まで変化します。よって

$$S = -\int_b^a f(x')\,dx'$$

といった具合です。