７章　チェックシートのＱ＆Ａ

Q. (1)「仕事は力と速度の内積を時間で積分したもの」この文について詳しく教えてもらいたいです。力と速度はおたがいにベクトルなのですか？何故力が変化するときは力と速度になるのですか？

A. 質問の「おたがいに」というところが気になります.

数学でベクトルの内積を習うとき「平面に描かれた２つの矢印」が出てくるので２つのベクトルは同質のものでないと内積を作れないかというと，そうではありません.「力のベクトルと変位のベクトルの内積をつくると，力が変位に際してした仕事になる」というように，異なる種類の内積（成分ごとに見れば，異なる種類の量のかけ算）の例はたくさんあります.・・・ということを確認したかったのかな？

「詳しく教えてほしい」と要望なので，基本に戻って解説しましょう：

まず，変位（位置の変化）はベクトル．速度は，変位のベクトルを所要時間（＝スカラー）でわって得られ量だから，ベクトル．加速度は，速度ベクトルの変化を所要時間で割った量だから，ベクトル.

つぎに，ニュートンの運動方程式は力は「物体に加わる力＝その物体の質量×加速度」です．質量はスカラー（どの方向から見ても同じ大きさ)，加速度はベクトル，したがって力は「ベクトル（加速度）のスカラー（質量）倍」であり，加速度の方向を持つベクトルです．力は「大きさ」と「向き」を言わないと決まらないのです.

速度ベクトルは，たとえば $\mathbb{v} = (1\ \mathrm{m/s}, 2\ \mathrm{m/s})$＝「x 軸方向の速度の成分が 1 m/s で y 軸方向の速度の成分が 2 m/s」のように，各成分が速度の単位った量です．力のベクトルも $\mathbb{F}=(3\ \mathrm{N}, 4\ \mathrm{N})$のように各成分が力の単位をもった量です.

上の例で，力と速度の内積すなわち仕事率は

$\mathbb{F}\cdot\mathbb{v} = (3\ \mathrm{N}, 4\ \mathrm{N})\cdot(1\ \mathrm{m/s}, 2\ \mathrm{m/s}) = 3\ \mathrm{N}\times 1\ \mathrm{m/s} + 4\ \mathrm{N}\times 2\ \mathrm{m/s} = 3\ \mathrm{J/s} + 8\ \mathrm{J/s} = 3\ \mathrm{W} + 8\ \mathrm{W} = 11\ \mathrm{W}$

となります.

「何故力が変化するときは・・・」という疑問について：

上の例では，時間的に変化しない力と速度について内積をとりました．このように，仕事率は決して時間的に力や速度が変動する状況下でだけ出てくる概念ではありません．たとえば，自転車をこいで一定の速さで坂道を上るとき，乗っている人は一定の仕事率で仕事をしています．ただし，仕事率に現れる力と速度は，ある時刻（その一瞬）で定義できる量であることがポイントです.

これに対して，仕事は「力」と「変位」の内積（力の方向の移動なら，力と移動距離の積，ただし符号に注意）です．変位は，ある長さの時間が経過することで実現されるため，仕事はある時刻で定義できる量とはなりません．そのため仕事を求めようとすると，移動の間に，時間の経過とともに，力が変動するという状況もありえるのです.

時間的に変動する力のもとで移動するときの仕事を求めるには，まず各瞬間の値が決まる「仕事率」をもとめ，それを時間的に積算するという手順になります．この手順が数学的には仕事率の時間積分です.

Q. (3) 一定の力が加わったとき$\frac{1}{2}mv^2 = F\,x$が成り立つのですか？

A. 一定の向きと大きさFの力が加わり，しかも力の向きに距離xだけ移動する（それは，初速度$v(0)$が 0 か，あるいは初速度の向きが力と平行のときに限られる）とき，物体の速度の大きさが変わります.（一方，速度の向きと直角方向の力が作用するなら，速度の向きが変わりますが，速度の大きさは変わりません.）

x 軸上を運動する物体の位置が$x(t)$のとき，x 軸方向の一定の力Fのもとでどのような運動をするかは，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = F,\ \ v = \frac{dx}{dt}$$

に従います．時間で１回微分したvが $\frac{F}{m}$ = 一定値となるのだから，vは，$\mathrm{t} = 0$で$v(0)$だとすると

$$v(\mathrm{t}) = \frac{F}{m}t + v(0)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{F}{m}t + v(0)\right)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{F}{m}t\right)^2 + 2\frac{F}{m}v(0)t + v(0)^2\right) - \frac{1}{2}mv(0)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{F}{m}t\right)^2 + 2\frac{F}{m}v(0)t\right) = F\left(\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v(0)\right)$$

一方，座標は

$$x(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v(0)t + x(0) \qquad \rightarrow \qquad x(\mathrm{t}) - x(0) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v(0)t$$

ですから，上の２式を総合して

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = F \times (x(\mathrm{t}) - x(0))$$

となります．初速度が$v(0) = 0$のとき，

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = F \times (x(\mathrm{t}) - x(0))$$

すなわち，時間 t だけ運動したあとの $\frac{1}{2}mv(t)^2$ と 力と変位の積 とが等しい，という結論になります．

Q(4)位置エネルギーは重力によって発生しているのですか？そもそも重力による仕事などあるのでしょうか？

A.　たとえば，山の上に荷物を運び上げるとき，人間が荷物に仕事をします．その荷物が山の下に（人手を借りずに！）転がり落ちるとき，ものを壊したり，音を出したりと，外に仕事をします．荷物を運び上げたときの仕事が物体になんらかの能力を与え，落ちるときにはその能力を使って外に仕事をすると思いましょう．この能力が物体の位置エネルギーなのです．月面で重力が小さいときは，地球の山と同じ高さの山の上にあげても，蓄えられた能力は小さいので，この能力は重力の大きさに依存します．それで，重力の位置エネルギーとか重力による位置エネルギーと呼ぶのです．もうすこし正確に言うと，「重力をちょうど打ち消す外力を加えて（物体が運動エネルギーを変えないように）移動するとき，外力がする仕事が物体の位置エネルギーの変化に等しい」のです．

仕事は力と移動距離の積です．したがって，仕事を移動距離で割る，位置エネルギーの差を 2 点間の距離で割ると，外力の大きさになります．その外力は重力をちょうど打ち消すものだから，位置エネルギーとは「その傾斜の大きさ＝力の大きさ」「その傾斜の向き＝力と逆向き」になります．

重力の向きが鉛直下向きなので，重力の位置エネルギーは鉛直上向きに大きくなります．鉛直方向に距離hだけ差がある 2 点間で，重力の位置エネルギーの差はmghです.なぜなら，傾きの大きさが$mg = mgh/h$となるようにしたからです．一方，重力だけが作用する物体が運動するとき，鉛直下向きに距離h移動すると，重力がする仕事がmghとなります．このとき位置エネルギーはmghだけ減少します．こうして，2 点間の移動に際して重力がする仕事＝重力の位置エネルギーの差（符号が逆）となります．

重力だけでなく，バネの復元力や電気的なクーロン力にも位置エネルギーを考えることができます．つまり，その傾斜が力のベクトル（符号が逆）を作り出せばよいのです．バネの復元力による位置エネルギー，クーロン力の位置エネルギー，などなど．

Q (8)位置エネルギーは定義できないときがあるのでしょうか？

A. あります．

位置エネルギーは「その傾斜＝物体が受ける力（符号は逆）」となるものです．摩擦力という力の場合は，同じ場所で受ける力であっても，物体の運動の向きによって摩擦力の向きが変わります．傾斜の方向は運動の向きによって変わる物ではないから，「摩擦力の位置エネルギー」というものは存在しません．

ある力の位置エネルギーがあれば，その力が作用するどんな場所にも，その傾きがあります．傾きがあるなら，位置エ

ネルギーの値が定義されていなければなりません．平面上の運動では，位置エネルギーを山の高さと考えればよく，山の斜面の傾きが力（方向が逆）を表すのです．たとえば，ある円周上の点で力が円の接線方向を向き一方向に回転しているようなときは，山の高さが定義できなくなります．このような場合も位置エネルギーを定義できません．

Q(9)「エネルギーが地球と物体の間に蓄えられる」とはどういうことでしょうか？

A. 少し難しい話です．

最初にバネの復元力の位置エネルギーについて考えてましょう．バネの端にとりつけた物体に外力を加えて復元力を相殺して移動するとき，外力は物体に仕事をします．その仕事が物体に蓄えられ，物体の位置エネルギーと呼ばれたのでした．見方を変えると，外力がする仕事はバネの変形を引き起こしたのだから，仕事はバネに蓄えられたと考えてもよいでしょう．押し縮めたバネは位置エネルギーを保持しているのです．バネの端の物体は，バネの位置エネルギーをもらって自分の運動エネルギーに変えるというわけです．

万有引力（したがって重力）を，目に見えない「バネ」が空間にあって，その復元力のようなもの（ただし，引力しかない）と思いましょう．そうすると，物体の万有引力による位置エネルギーを，物体間の空間に蓄えられたエネルギーと解釈することもできます．空間が万有引力により変形したと考えるのです．

Q(12) 安定な平衡点と不安定な平衡点：この文章の意味がよく分かりません。図が思い浮かばないのです。

A. バネの復元力の位置エネルギーのグラフは，下に凸の放物線です．放物線の頂点では位置エネルギーが極小になっていて，その点からずれると復元力でもとに戻ろうとします．このように位置エネルギーが極小の位置は安定な（ずれるても，もとに戻ろうとする力が働く）位置です．一方，位置エネルギーの極大すなわち上に凸の点では（山の頂上に物体を置いたときの様子を想定してください），グラフの傾きが 0 なので，その位置では力が働かない（平衡点）なのですが，わずかにずれたとき，復元力とは逆にずれを助長する向きの力が作用するため，不安定になります．

例題の Q&A

例題 7.1

Q. 摩擦力のした仕事は常にマイナスを付けてもいいのですか？

A. はい.

ある力が物体にする仕事とは，その力と物体の変位（符号付きの移動距離）の積です．力と変位が同じ向きなら仕事は正，逆なら負です．摩擦力とは，物体の動きを邪魔する方向に働く力です．したがって変位と摩擦力の向きは必ず逆になり，摩擦力が物体にする仕事は常に負となります.

例題 7.2

Q (1)変化量を求めるのであれば$-\mathrm{mv}$ではなく$+\mathrm{mv}$ではないですか？

A. 時間的に変わる量の変化分は，(将来の量)−(現在の量)，あるいは　(現在の量)−(過去の量)と，時「刻の大きい」ほうから「時刻の小さい方」を引く約束になっています．この例題の場合，将来＝静止，現在＝運動中です.

つぎに，速度を表すため座標軸を設定します．座標軸を右向きにとります．そうすると

将来の運動量　−　現在の運動量　＝　0　−　mv　＝ −mv

となります．ｍｖが正のとき物体は右向き（座標軸の正方向）に運動し，負のとき左向きに運動しているので，この座標系で運動量の変化が負（または正）のときは，最初に右向き（または左向き）に運動していた物体が静止した，となります.

Q (2) 7.1 の実験なので F ではなく$\mu' \mathrm{mg}$などと置かないでいいのですか？

A. 確かに・・・

言い訳がましいですが，$\mathrm{F} = \mu' \mathrm{mg}$　とおいて式を書き直したからといって，新しい情報が増えるわけでも無し・・・

必要になったら置き換えればいいのでは？

Q.(3) なぜ見る人の速さによって運動エネルギーが変化しているのですか？電車のもってるエネルギーですか？

A. 観測者 O から見た物体の速度vは，別の観測者 O'から見た速度v'と必ずしも一致しません．O と O'が相対的に運動していないときだけ一致し，一般には O と O'の相対速度がVのとき$v' = v + V$ です..したがって運動エネルギーも異なります．運動エネルギーというのはそういうものなのです．$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(v+V)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mvV + \frac{1}{2}mV^2$より，運動エネルギーの差は

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mvV + \frac{1}{2}mV^2$$

となります.

O と O'が慣性系であれば，物体に働く力はどちらから見ても同じになります．その力がする仕事は，同じ時間内で移動距離が違って見えるので，違うあたいになります.

「力がした仕事＝運動エネルギーの変化」という関係は，１人の観測者の中で成り立つ式です．運動エネルギーの変化の値は，異なる観測者観測者間の相対速度を用いて①速度を変換し②移動距離を変換する必要があります.

これらは「異なる速度で運動する観測者の間の座標変換の問題」であって，電車やバスの運動エネルギーが云々という問題では全くありません.

例題 7.3

Q (7.43)式が何を表わしているかわかりません。

A. 式(7.42)を変形したものですね．(7.42)は，重力による運動で

運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$ ＋ 重力の位置エネルギー$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg \times 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

と，一定の値に保たれることを表す式です．したがって，(7.43)もエネルギーの保存から出てきた式です.

例題 7.4

Q. 式の意味がよく分からないです。(7.55)から(7.56)になるまでの過程の式の解説が欲しいです。

A. 教科書の記述の流れから，バネ定数 k のバネの復元力で単振動する質量 m の物体の運動を考えていることは明らかだと思います．運動エネルギーは定義式(7.15)にしたがって

$$K(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

位置エネルギーは式(7.45)の計算により

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

と求まります．物体は単振動をしているので，その位置と速度は，式(6.32)で（不要な一般性を取り除き）$\phi = 0$とおいて

$$x(t) = a\cos\omega_0 t \quad (6.32)(7.47), \qquad v(\mathrm{t}) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 a\sin\omega_0 t \quad (7.49), \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.30)(7.48)$$

と書くことできます．したがって，運動エネルギーと位置エネルギーは時間的に変動します：

$$K(v) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,(-\omega_0 a\sin\omega_0 t)^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t \equiv K(t), \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega_0 t \equiv V(t)$$

これらを単振動の周期$T = 2\pi/\omega_0$にわたり時間的に平均した量を計算します．時間平均は，T 内の量を集め（＝積分）て T で割ります．

準備：$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$，$\int_0^T \sin^2\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T (1-\cos 2\omega_0 t)\,dt = \frac{T}{2} - \int_0^T \cos 2\omega_0 t\,dt = \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 T = \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 T = \frac{T}{2}$

$$位置エネルギーの時間平均は < \mathrm{K} > = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,dt = \left(\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\right) \times \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega_0 t\,dt = \left(\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}ma^2\omega_0^2$$

運動エネルギーについても全く同様です.

例題 7.5

Q (1) 位置エネルギーに負の符号をつける意味がわかりませんでした。

A. 運動エネルギーは，正である質量と，負ではない速度の 2 乗の積だから，負にはなりません．しかし位置エネルギーは p.108 に書いたように基準点と注目する点の差だけがリアルな量であり，基準点の位置エネルギーの値をどのようにセットするかで，符号が変わっても全く問題ありません.

ところで，質問は，もしかすると式(7.62)の中辺や右辺が「－」から始まっていること？それは式(7.59)から後戻りしながら自分で検討してください.

Q(2) e^xとe^{-x}が入った関数のグラフの描き方が分からないので解説お願いします。

$V(x) = V_0\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -V(x)$より，奇関数であると分かります: V(0)=0 と対称性.
$\lim_{x\to\infty} V(x) = V_0 \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = V_0 \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = V_0$, $\lim_{x\to-\infty} V(x) = -V_0$：これで両極限がわかります.
あとは，おおよその様子でよければ$1 - e^{-2x}$のグラフと$\frac{1}{1+e^{-2x}}$のグラフ（$1 + e^{-2x}$を描いて逆数をとる）を描き，グラフ上でかけ算をします．もう少し丁寧にやりたければ，$\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}$とやって傾きを決めたら？

双曲線関数は前期の「微分法」の教科書 2 章に出てきます.

微分のしかたは，双曲線関数を使うと楽ですが，下は指数関数の微分だけ：

$$\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$$