力学　2012.10.01　提出レポートから Ｑ＆Ａ

例題 2.1

Q.　２次元極座標の説明で「平面運動を記述するには大変有用である」とあるが、なぜ有用なのか？メリットは何か？

A.極座標で点の位置を表すとき「基準の方向からの角度θ」と「原点からの距離r」を用います.「どちらの方向にどれだけの距離」というわけです．たとえば，どちらの方向にあっても原点からの距離さえ同じなら現象の起き方が同じという状況(2 次元なら軸対象, 3 次元なら球対称)は，極座標を用いるとrだけで書き取ることができるはずです．同じことを xy 座標で書くなら x も y も使わなければなりません．変数の数が少ないほど式の運用は楽になります.

例題 2.3

Q.図を使わなくても解は導けるが、なぜ時間と速度のグラフで面積を求めると距離が出るのかわからない。

A. vt 図で「速度が$v(\mathrm{t})=v_0=$一定」の運動を表すと，そのグラフは t 軸に平行で直線になります．このとき時刻$t_A\rightarrow t_B$の移動距離(変位)は$x(t_B)-(t_A)=v_0(t_B-t_A)$ですから，移動距離がグラフの下側の面積に一致します.

速度が刻々と変化する運動のときは，端から端までをいちどに比較するのではなく，少しずつ運動を追いかけます．すなわち短い時間の間の変位を次々に重ねて全体を表現します．対応する時間の刻み幅を等間隔の$\Delta\mathrm{t}$とすると$(t_B=t_A+N\Delta t)$,

$$x(t_B)-x(t_A)=[x(t_B)-x(t_A+(N-1)\Delta t)]+\cdots+[x(t_A+2\Delta t)-x(t_A+\Delta t)]+[x(t_A+\Delta x)-x(t_A)]$$

$\Delta\mathrm{t}$を十分に小さくすると，その間で速度がほとんど変わらないとみなせるので

$$x(t_A+(k+1)\Delta t)-(t_\mathrm{A}+k\Delta t)=v(t_k)\Delta t$$

そうすると

$$x(t_B)-x(t_A)=v(t_A+(N-1)\Delta t)\times\Delta t+v(t_A+(N-2)\Delta t)\times\Delta t+\cdots+v(t_A+\Delta t)\times\Delta\mathrm{t}+v(t_A)\times\Delta t$$

となります．この式は$v(t)$のグラフを階段で表すとき，その下側の面積が変位となることを示します.

この議論は，積分を用いると簡単に表現できます：

$$x(t_B)-x(t_A)=\int_{t_A}^{t_B}dx=\int_{t_A}^{t_B}\frac{dx}{dt}dt=\int_{t_A}^{t_B}v(t)dt$$

Q. 問題は難しくないのだが、解答の「たとえば精度が 1%だとすると 15.625×0.01=0.15 なので、小数点一桁目まではかなり信用できる」の文における精度というものの概念はどんなものなのだろうか。何に対しての精度であるのかが分からないため、この解答が理解できなかった。

A. 「精度」＝「相対誤差」＝「測定誤差の大きさ÷測定の平均値」
です.

例題 2.4

Q.　$\mathbf{a(t)=-A\omega^2\cos\omega t}$　は円運動の式ですか？

A. この式は，加速度が時刻のコサイン関数で変化するというものです．この式が表す運動は，単振動（バネの先につけたおもりの往復運動）です．円運動との関連で言うと，一定の速さでまわる円運動を真横から眺めたときの運動です.

Q.例題 2.4 でも A を定数とすべきなのではないでしょうか。

Ａ．そのとおりです！

例題 2.5

Q. 問題文中では重力加速度が定義されていないが，特に断りがない場合には 9.8 m/s² の値を採用してもよいか。

A. そのようにお願いします.

例題 2.6

Q. 重力加速度負となっていて，重力と逆方向になっているのが変な感じです？

A.座標の向き（座標軸の正の方向が鉛直上向きか下向きか）は勝手に定めることができます．重力の方向は常に鉛直下向きなので，もし座標を上向きにとれば加速度は「座標軸の向きと逆方向」したがって負の加速度，座標を下向きにとれば加速度は「座標軸と同じ向き」したがって正の加速度となります.

Q. $\frac{d^2x}{dx^2} = -g$ が $x = \frac{1}{2}gt^2$ の式からどのように出たのかわからない。

A. 加速度の式 $\frac{d^2x}{dx^2} = -g$ が最初にあり，この式に数学的な情報操作として積分を行った結果，$x = \frac{1}{2}gt^2$が出てきました.

Q.私は最初に x(t)を求めて、それを微分していき v(t)を求めたが、教科書では a(t)を積分して v(t)、x(t)を求めている。私の解き方では今後不満が出てくるのか？

A. 後に学ぶのですが，運動の科学では物体の加速度が出発点になります．加速度が力と比例するという自然界の法則があるのです．力が分かっているとき，運動（速度や位置）がどのようになるかを知りたい，というのが基本のパターンです．ここではそのような場合の数学的な情報処理の練習をしています.

もちろん，最初に x(t)が分かっていて，そこから速度や加速度を知りたい場合もありますが，この問では，高校物理で暗記した「等加速度運動のときの移動距離の公式」は覚えていないものとしています.

Q. 地面からの高さが h のところにあるボールに対して h の高さを図に書き入れるときに、ボールの最下部までなのか、最上部までなのか、はたまた真ん中までなのかどうなるのだろうか。自分は真ん中にしたが正しいのだろうか。

A. 物体の大きさを考えなくてよいために，質点というモデルがあります.

例題 2.7

Q.船が川を横断するのに、本当に川の流れは進行を妨げないのか

A. 岸が見えないような広大な川で船を進めるとき，場所的に一様で時間的に一定な流れがあっても，その流れには気づかないでしょう.（陸に到着したとき「流された」と気づくでしょうが・・・）

陸から観測するときは，水とともに移動する座標系で観測した船の速度と，水の流速のベクトル和が船の速度になります.

Q. $|\vec{v}| = \sqrt{v^2x + v^2y + v^2z}$ という公式があるが、どうやってこの式が出るのかイメージがつかない。

A. 微小な時間dt内の変位を考察しましょう．x軸方向の速度の成分がv_xのとき，dt内に生じるx軸方向の変位は$dx = v_x dt$です．同様に，$dy = v_y dt$，$dz = v_z dt$です．変位ベクトルは(dx, dy, dz)なので，変位の大きさは$dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$です（もし 3 次元のピタゴラスの定理が分からなければ，$dr_{xy} = \sqrt{dx^2 + dy^2}, dr = \sqrt{dr_{xy}^2 + dz^2} = \sqrt{(dx^2 + dy^2) + dz^2}$）と，

2次元を仲介して考える．）

速度の大きさは，dt 内に進んだ距離 dr から，$\frac{dr}{dt}$となります：

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Q.図の斜辺の大きさであるが、なぜそれが土手に立つ人から見た船の速さとなるのだろうか

A.　速度ベクトルの和を図解で計算しました

問題 2.1

Q.極座標と直交座標の変換（式の誘導）の仕方が分かりません

A. ある点の直交座標が(x,y)で極座標が(r,φ)のとき，(r,φ)の値が分かれば

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$$

により(x,y)の値を計算できます．逆に，(x,y)の値が分かっていれば

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

により(r,φ)を計算できます（必要なら，このφを用いて sinφや cosφを計算できます）.

問題 2.3

Q. 距離を求める時、$v^2-{v_0}^2=2ax$　の式を使ってやった方が早いと思いますが、積分を使ってやらなければいけませんか？

A. 等加速度の直線運動であれば，たしかに高校で習った【公式】が使えるのですが・・・その公式は，それ以外には何にも役に立ちません．積分で攻める方法を身につければ（積分さえ計算出来れば）どんな場合にも使えます．これが，積分を使う方法を紹介している理由です.

問題 2.5

Q. この問題では，$\sqrt{2}$の近似値を使って有効数字2桁の計算をしていますが， $\sqrt{2}$のままではいけないのでしょうか。

A. $\sqrt{2}$という数値が測定値ではなく，理論的に現れる数値なので，この質問が出たのだと思います.

もし，文字式で表す結論を導くような場合であれば，変数を表す文字にどんな有効桁数の数値がくるか分からないので，$\sqrt{2}$（やπなど）はどこまでも正しい値として，そのまま残しておいてください.

しかし，この問題の他の数値を見ると，すべて有効数字2桁です．そうすると，どのみち，最終結果の有効数字は 2 桁しかないわけです．仮に$\sqrt{2}$をそのまま残して書いておくと「で，結局どんな値？」といわれたとき，$\sqrt{2}\simeq 1.41$を使って計算しなければなりません.

Q. 地面に衝突するまでの時間なら x=0 は違うのではないでしょうか。地面に衝突する時間なら x=0 で納得できるのですが。

A. 地上に衝突する【までの時間】は，衝突した【時刻】から出発した時刻を引いて求めるので，衝突した時刻を計算する必要があります．出発した時刻を時間の原点にとれば，衝突した時刻が衝突するまでの時間と一致します.

問題 2.7

Q.どのような公式を使ったのかを説明してほしい。

A. 公式は使いません！「問題詳解」の該当部分を見てください.

問題 2.8

Q. なぜ自動車の位置を 2 次元極座標で表したのだろうか。円→2 次元極座標という具合で用いてもよいのだろうか。

A. まず，平面運動だから 2 次元（3 次元にして考える必要はない）で足ります.
つぎに，円運動ならば半径は一定に保たれますから，円の中心を原点として極座標をとると動径がいつも一定となり，自動車の運動は偏角φの時間的な変化だけで表現できます．これらを念頭に「2 次元極座標」であらわそうとするのは自然なことだと思います.