問題 3-1

Q. 実際に進んだ経路がわかりませんでした．

A. Webpage の詳解の図で→にそって三角形の 2 つの辺を順次進みます．

Q. Webpage の詳解を見ましたが，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\mathrm{OP}$について，導き方がよくわかりません．

A. この質問の理由は，もしかすると，ベクトルの基本演算が身についていないため？

教科書の 3 章の最初の部分を復習しましょう．ベクトル$\vec{e}_x$と$\vec{e}_y$は 2 次元平面の正規直交基底をなします．言い換えると，まず，これらのベクトルは長さが 1（これを「正規」という）です：内積を用いて表現すると「自分自身との内積が 1」，実際に式で表すと

$$|\vec{e}_x| = \sqrt{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x} = \sqrt{1} = 1,\quad |\vec{e}_y| = \sqrt{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y} = 1$$

さらに互いに直交します：内積が 0 です：

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \qquad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$$

そして，内積の線形性，分配則，交換則などから，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$を実数として

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y) \cdot (\gamma\,\vec{e}_x + \delta\vec{e}_y) &= \alpha\vec{e}_x \cdot (\gamma\,\vec{e}_x + \delta\vec{e}_y) + \beta\vec{e}_y \cdot (\gamma\,\vec{e}_x + \delta\vec{e}_y) \\ &= \alpha\gamma\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + \alpha\delta\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + \beta\gamma\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + \beta\delta\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \alpha\gamma \times 1 + \alpha\delta \times 0 + \beta\gamma \times 0 + \beta\delta \times 1 = \alpha\gamma + \beta\delta\end{aligned}$$

となります．この結果を簡単に言うと「内積の値は，対応する成分どうしの積の和」となります．

詳解の図には記入していませんが，O から真北に上がった位置を Q とします．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\vec{e}_y,\quad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = b\sin\alpha\vec{e}_x + b\cos\alpha\vec{e}_y$$

したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} &= a\vec{e}_y + (b\sin\alpha\vec{e}_x + b\cos\alpha\vec{e}_y) \\ &= b\sin\alpha\vec{e}_x + a\vec{e}_y + b\cos\alpha\vec{e}_y = b\sin\alpha\vec{e}_x + (a + b\cos\alpha)\vec{e}_y\end{aligned}$$

となります．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の長さは，自分自身との内積を計算して平方根をもとめます．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}} &= \sqrt{(b\sin\alpha\vec{e}_x + (a + b\cos\alpha)\vec{e}_y) \cdot (b\sin\alpha\vec{e}_x + (a + b\cos\alpha)\vec{e}_y)} \\ &= \sqrt{(b\sin\alpha)^2 + (a + b\cos\alpha^2)} = \sqrt{b^2\sin^2\alpha + a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha} \\ &= \sqrt{b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + a^2 + 2ab\cos\alpha} = \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab\cos\alpha} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\end{aligned}$$

です．

Q. 「どの方角か」と聞かれたとき「θ =・・・」と答えなくてよいですか．

A. もし具体的な数値が与えられて θ が数値的に計算できる状態であれば，θ の値を求める作業が必要となるかもしれません．この問では，$\cos\theta = \frac{a + b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$まで書けば，仮にこれを$\theta = \arccos\frac{a + b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$と書き直しても，情報が増えるでもなく，見やすくなるわけでもないので，$\cos\theta =$ ・・・で十分です．

問題 3-2

Q. 正規直交関係をどのように表すのですか？

A. $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$が正規とは，3 つのベクトルがいずれも長さが 1 ということです．内積を用い

て表すと自分自身との内積が１となります：

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=1,\qquad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=1,\qquad \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1$$

３つのベクトルが互いに直交することを内積を用いて表すと，互いの内積が０となります：

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=0,\qquad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=0,\qquad \vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$$

問題 3-3

Q. $\left(x(t)\right)^2$はtの関数なのにxで微分できるのですか.

A. $y=f(x)=x^2$をxで微分することはできますね．このxがtの関数のとき，$y(t)=f(x(t))=(x(t))^2$です．yをtの関数と考えてtで微分するときに，合成関数の微分法を用います：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Q. $|\vec{r}(t)|$ =一定　とはどういう意味ですか.

A. 変数がtなので「tによらず一定の大きさとなる」という意味です. 原点からの距離$|\vec{r}(t)|$が（どのように動いても）常に不変なのだから, 円周上の運動となります. もし$\vec{r}(t)=$ 一定なら, この「一定」はベクトル量としての一定値を表します. そのときは, 位置ベクトル$\vec{r}(t)$の先端は不動の一点を指し続けることになり，静止している点となります.

Q.「ベクトルの内積の微分や二回微分する方法」が分かりません.

A. Webpage の詳解の説明を読んで，さらに不明な部分を質問してください.

Q. $\vec{r}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0$から$\vec{r}\cdot\vec{a}=-v^2$をどのようにして導いたのですか.

A. 加速度の定義$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$と速度の定義$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$を用いると，$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$です．従って左辺は

$$\vec{r}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\cdot\vec{a}+\vec{v}\cdot\vec{v}$$

さらに，自分自身の内積は，そのベクトルの大きさの２乗なので，$\vec{v}\cdot\vec{v}=v^2$ となり

$$\vec{r}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\cdot\vec{a}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{r}\cdot\vec{a}+v^2=0$$

となります．最後の等式で，左辺第２項を移項すると

$$\vec{r}\cdot\vec{a}=-v^2$$

を得ます.

Q.「加速度は常に円の内側を向くが中心に向くとは限らない」というところが分かりません．加速度が中心を向いていなくても円運動になるのですか？

A. 一定の速さで円運動するときは，加速度は常に円の中心に向きます．しかし，円周上を速さを変えながら運動する場合には，円の中心に向かう加速度に加え，接線方向に加速度を持つので，加速度ベクトルの向きは円の中心を向きません.

円運動でない一般の曲線軌道上の運動についても，ある瞬間には円運動をしていると考えることができます．軌道の接線方向と，軌道を円で近似したときの円の中心方向に加速度を分解することができます.

問題 3-4

Q. ホドグラフとは何かがわかりません.

A. 用語の意味が分からないときは，教科書の対応部分を勉強しましょう（重要語は索引から検索できます）．また Webpage の詳解にも情報をたくさん含んでいます.

ここでは別の言い方をしてみましょう．速度ベクトルを成分で表すと

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

となりますが，速度ベクトルが刻々と変化するとき，各成分は時間の関数となります：

$$v_x(t),\quad v_y(t)$$

tの値をひとつ決める（たとえばt_0とする）と，XY 座標平面に点$(v_x(t_0), v_y(t_0))$が現れます. t_0を連続的に変化すると，点がつながって曲線になります．この曲線がホドグラフです．言い換えると，$X = v_x(t)$，$Y = v_y(t)$から t を消去して得た X と Y の関係式がホドグラフを表す方程式になります.

ホドグラフと呼ばれる曲線から得られる情報は次の通りです：
曲線上のある点は，どの時刻に対応するかを知っていれば，その時刻の速度ベクトルを表します．原点からその点までの距離が速度の大きさ，原点からその点への向きが速度の方向です．ホドグラフの曲線の接線は，選んだ接点に対応する時刻の加速度の向きを表します.

その他の質問に対しては Webpage の詳解で解説が完了しているように思います.

問題 3-5

Q. $\sqrt{116} = 10.8$　はどのようにして求めるのだろう？

A. 電卓を使うとか・・・電池が無いときは，手で計算するしかないですね．テーラー展開を使うと：

$$\sqrt{116} = \sqrt{121-5} = \sqrt{11^2-5} = 11\sqrt{1-\frac{5}{121}} \simeq 11\times\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{121}\right) \simeq 11\times(1-0.02) = 10.78 \simeq 10.8$$

問題 3-6

Q. 詳しい解答をいただきたいです。

A. Webpage の詳解を見て，分からない箇所を質問してください

問題 3-7

Q. O_{xy}系で静止している点は$O_{x'y'}$系では座標系の回転と反対向きに円運動しているように見えるのは何故ですか.

A. O_{xy}系のx軸上の１点 P を観察しましょう．$O_{x'y'}$系が反時計回りに回転するとき，最初にx軸と重なっていたx'軸は右上がりに傾いていきます．そうすると，点 P はx'軸の下側に来ます．$O_{x'y'}$系から見ていると，P は（原点からの距離を変えることなく）時計回りに回転するように見えます.

数学的に理解するには，座標変換の式を観察します.

点 P のO_{xy}系での座標を$(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ とします．x' 軸がx軸から時計回りに角 θ の傾きのとき，$O_{x'y'}$ 系における P の座標は

$$x' = (r\cos\alpha)\cos\theta + (r\sin\alpha)\sin\theta = r\cos(\alpha-\theta)$$
$$y' = -(r\cos\alpha)\sin\theta + (r\sin\alpha)\cos\theta = r\sin(\alpha-\theta)$$

となります．$O_{x'y'}$ が時計回りに角速度 ω で回転するなら，$\theta=\omega t$ であり，P の$O_{x'y'}$ 座標（すなわち$O_{x'y'}$ で見た P の位置）は

$$(x', y') = (r\cos(\alpha-\omega t), r\sin(\alpha-\omega t))$$

となり，時間の経過にともない O'P と x'のなす角が負の方向に増えていきます．これは時計回りの回転を意味します.

問題 3-8

Q. $(\lambda\vec{A}+\vec{B})\cdot(\lambda\vec{A}+\vec{B}) \geqq 0$は証明は不必要ですか？

A. したほうがよいかも．でも自明に近いですね．理由は，任意のベクトルの自分自身との内積は，各成分の二乗の和であり，負になることは無いから.

Q.(3,15)(3,16)は交換法則だからということでいいのでしょうか

A. (3,15)について，内積の定義を $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ としているので，右辺で$A_xB_x = B_xA_x$ など，すなわち実数の積における交換法則によっています．Webpage 詳解を参照してください.

その他の質問も，Webpage 詳解を参照してください.