教科書 5 章の Q&A

本文

Q. 空気の抵抗と空気による浮力の違いとはなんでしょうか？⇒空気抵抗の中でも下からの空気抵抗が自分には浮力に見えてしまうのですが・・・

A. 空気の浮力は，空気の圧力が上に行くほど低くなるため，物体の上下の面に加わる力の差ができて生じる力です．物体が空気に対して運動しているか否かにかかわらず空気の浮力が生じます．重力が働かないときは（宇宙船の中とか・・）浮力が生じません．
　空気の抵抗は，物体に対して空気が動いているとき<u>だけに</u>生じる力です．空気の粘性（物体にまとわりつく性質）から生じ，運動をさまたげるように作用します．

Q. 運動を調べるためのステップ 2 で，(5.4)式($m\frac{d^2z}{dt^2}=0$)をつくっても，そのあとは使いません．こういうとき，この式を書いておかなければなりませんか．

A. 「運動が鉛直面内で行われ，この面に xy 軸をとる」と断っておけば，式を書か必要はありません．

問題 5.3

Q. 巻末の略解で「式(5.52)より」「(5.62)より」とありましたが，これらの式の導出のしかたが分かりづらかったので解説をお願いします．

A. (5.52)のv_{term}の導き方を説明しましょう．まず数学的に，つぎに物理的な直観により説明します．(5.62)については運動を解いていないので，物理的な直観による説明を適用してください．

　まず，数学的な説明：

運動方程式 $\frac{dv}{dt}=g-\gamma v$ (5.43)を満たす解$v(t)$の，$\mathrm{t}\to\infty$のときの極限値が(5.52)のv_{term}です．実際，解は(5.51)すなわち

$$v(t)=\frac{g}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})$$

となることが分かったので，$t\to\infty$極限をとると，$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} e^{-\gamma t}=0$となるので，

$$v_{\mathrm{term}}=\lim_{\mathrm{t}\to\infty} v(t)=\frac{g}{\gamma}=\frac{mg}{c}$$

です．最後の等号はγ は(5.44)で定義されていて$\gamma=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}}$（もとの運動方程式が$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-c\frac{dx}{dt}$）であることを用いました．

　次は，物理的な直観による説明：

　・物体に加わる力は，(重力)＋(速度に比例する空気抵抗)です．物体が落下しているとき，両者は逆向きです．
　・速度 0 で落下を始めた瞬間には（速度が 0 なので）重力だけが加わります．
　・重力によって加速され速度が増すにしたがい，空気抵抗が増えます
　・速度の増加にしたがって物体に加わる合力が徐々に減り，加速度が減ります（速度の

増え方が鈍ります)．しかし，落下速度は増え続けます．

・もし仮に，空気抵抗が重力より大きな速度になったとすると，合力は鉛直上向きになり，落下速度が減ることになります．ですから，物体の速度はある一定の値を超えないことがわかります．速度が増加するのに一定の値を超えないのですから，かならず「行き着く先の速度」があります．（これは数学的な推論ですね）

・言い換えると，重力が抵抗力に勝っているかぎり加速は続けるのですが，しまいには重力と抵抗力が同じ大きさになり，合力が 0 となって加速しなくなります．すなわち，速度が変化しなくなります. 変化しなくなった速さが「行き着く先の速さ」であり，これをv_{term}と書きます.

・速度が変わらないで落下する状況は$\frac{dv}{dt}=0$と表せるので，これを(5.43)の左辺に代入し

$$\frac{dv}{dt}=g-\gamma v=0$$

よって，このとき$g-\gamma v_{\mathrm{term}}=0$が成り立っているはずです. すなわち$v_{\mathrm{term}}=\frac{g}{\gamma}$となります.

ただし，この状況が正確に実現するのには，無限の時間がかかります.

問題 5.5

Q. 終速度が小さくなったならば、スカイダイバーが受ける力も小さくなるのでは？

A. 空気抵抗は，物体の形（断面の大きさや流線型か否か），物体表面の凹凸の様子などで変化します．Kv_{term}^2の比例係数Kが異なるのです.

パラシュート降下のときは，v^2 に比例する空気抵抗が作用します．パラシュートが開くと，大きな傘により，（落下速度が同じなら）空気抵抗が大きくなります．傘が開いていると，小さな速度でも同じ空気抵抗の大きさを得ます.

空気抵抗の係数は（抵抗が v に比例する場合も， v^2 に比例する場合も），さらに空気の密度や温度，気圧などにも左右されます.

Q.同じ形、重さの物体が落下する場合、落下速度は互いに等しくなると思います。今回、取り扱った問いでは「形」が違う物体が落下するため、終速度が異なるのでしょうか。

A. そのとおりです．直前の Q&A 参照.

問題 5.6

Q. 運動方程式の積分により速度が求まるのは，なぜでしょうか。

A. 運動方程式は， $m\frac{d^2x}{dt^2}=F$のように加速度を「xのtに関する 2 階微分係数」で表すときもあるし，$m\frac{dv}{dt}=F$のように「vのtに関する 1 階微分係数」で表すときもありますが，いずれにしても時間についての導関数を含む式です．導関数を含む方程式を微分方程式といいます．以下では，$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=f$の形の運動方程式について論じます.

もし$\frac{dv}{dt}=f$の左辺がtの関数として与えられているときは，両辺をtで積分し

$$\frac{dv}{dt}=f \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{dt}dt=\int f(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{dt}dt=\int dv=v(t)=\int f(t)\,dt$$

となるので，運動方程式を積分して速度を得たことになります．

fがvの関数のときは，両辺をfでわり，tで積分すると

$$\frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt}dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt}dt = \int 1\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{f(v)}dv = t + C$$

左辺の積分が　$\int \frac{1}{f(v)}dv = G(v)$　となるとすれば

$$G(v) = t + C$$

ですから，この式を$v(t) = \cdots$の形になおします．この場合も運動方程式を（変形したあとで）積分すると速度が求まるわけです．

fが時間や速度，位置についての多変数関数のときは，このような簡単な積分で解くことはできないのですが，それでも「求める量の微分について書いた式から，もとの量を求めるとき，積分する」ことになります．積分とは，微分したあとの形を被積分関数として見せておいて，もとの形を見つける作業だから，微分方程式が積分により解かれるのは，当然と言えるでしょう．

Q. 巻末解答の式変形を詳しく説明してください．

A. 運動方程式は

$$m\frac{dv_x}{dt} = -m\gamma v_x \cdots ① \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -m\gamma v_y - mg \cdots ②$$

①の両辺をv_xで割り①’ とし，②の両辺を$v_y + \frac{g}{\gamma}$で割り②’とします：

$$\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt} = -\gamma \cdots ①' \qquad \frac{1}{v_y + \frac{g}{\gamma}}\frac{dv_y}{dt} = -\gamma \cdots ②'$$

これらの両辺を t で積分します：

$$\int \frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}dt = \int (-\gamma)dt \qquad \int \frac{1}{v_y + \frac{g}{\gamma}}\frac{dv_y}{dt}dt = \int (-\gamma)dt$$

いずれの式も，変数を$t \to v_x$，$t \to v_y$と置換して$\frac{dv_x}{dt}dt = dv_x$，$\frac{dv_y}{dt}dt = dv_y$のように書き直せるので

$$\int \frac{1}{v_x}dv_x = \int (-\gamma)dt \cdots ③' \qquad \int \frac{1}{v_y + \frac{g}{\gamma}}dv_y = \int (-\gamma)dt \cdots ④'$$

となります．これらの積分記号を取り去った関係式が

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\gamma dt \cdots ③ \qquad \frac{dv_y}{v_y + \frac{g}{\gamma}} = -\gamma dt \cdots ④$$

です．逆に「③’ を積分すると③となる」というような言い方もします．

③と④は，「微（小増）分」の考えを用いると①’と②’から直ちに求めることも出来ます．そしてそれが普通のやりかたです．実際，たとえば①’の両辺に dt をかけて

$$\boxed{\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt} = -\gamma \quad \Rightarrow \frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}dt = -\gamma dt\text{，この左辺は，}dv_x = \frac{dv_x}{dt}dt\text{ の関係から }\frac{dv_x}{v_x} = -\gamma dt}$$

つぎに，不定積分の計算を行いましょう．

log xを微分すると$1/x$となることは既知としましょう．同じ内容を積分記号を用いて言い換えると，$\int \frac{dx}{x} = \log x + \mathrm{C}$ となります．変数を u と書き換えると

$$\int \frac{du}{u} = \log u + \mathrm{C}$$

です．$u = v_x$とすれば

$$\int \frac{1}{v_x} dv_x = \log v_x + C_1$$

となります．もちろん，$\int(-\gamma)dt = -\gamma t + C_3$です．以上をまとめると，

$$\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}dt = -\gamma dt \text{を積分すると}$$

$$\log v_x + C_1 = -\gamma t + C_3 \quad \Rightarrow \quad \log v_x = -\gamma t + (C_3 - C_1) = -\gamma t + C \cdots ⑤$$

となります．最終辺の C について，「左右両辺に不定積分があるときは，積分定数は最初から 1 つにまとめておけばよかった」のです．⑤を対数を用いずに表すと

$$v_x = \mathrm{e}^{(-\gamma t + C)} = e^{-\gamma t}e^{C} = e^{C}e^{-\gamma t} = Ae^{-\gamma t} \cdots ⑥,\ A = e^{C}$$

です．

同様に，$u = v_y + \frac{g}{\gamma}$としましょう．$\frac{dv_y}{v_y + \frac{g}{\gamma}} = -\gamma dt$を積分すると

$$\int \frac{1}{v_y + \frac{g}{\gamma}} dv_y = \log\left(v_y + \frac{g}{\gamma}\right) + C_2$$

ですから，$\log\left(v_y + \frac{g}{\gamma}\right) = -\gamma t + C'$となり，

$$v_y + \frac{g}{\gamma} = Be^{-\gamma t} \Rightarrow v_y = Be^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \cdots ⑦, \quad B = e^{C'}$$

です．

⑥と⑦が運動方程式の<u>一般</u>解であるとは，「これらが運動方程式を満たす関数」であり，「そこに含まれる任意定数の値を調整すれば特定の初速度の後の速度を表せる」ことです．初速度が水平方向すなわちy成分が 0 となり，$v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ですが，これを実現する A と B は

$$v_x(0) = Ae^{-\gamma \times 0} = A \times 1 = A = v_0$$

$$v_y(0) = Be^{-\gamma \times 0} - \frac{g}{\gamma} = B - \frac{g}{\gamma} = 0 \Rightarrow B = \frac{g}{\gamma}$$

です．こうして，与えられた初期条件を満たす解として

$$v_x(t) = v_0\, e^{-\gamma t} \cdots ⑧,\ \ v_y(t) = \frac{g}{\gamma}e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} = \frac{g}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1) \cdots ⑨$$

を得ます．