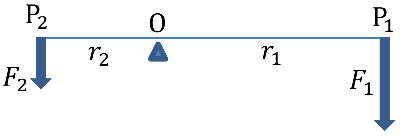
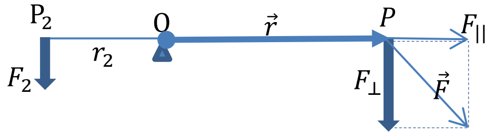
物体に力を加えたとき回転運動の様子が変化する（回転が始まる，止まる，回転の勢いが変わる）ことがある．回転運動と言っても，物体の運動はニュートンの運動の法則にしたがうのだから別の法則があるわけではない．だが「回転」を表すのに便利な量を導入して運動法則を書き換え，回転運動についての日常の経験（たとえば，回転は持続する，回転の勢いを変える力の効果は回転中心から作用点までの距離と力の向きに依存するなど）を直感的に表す式を導く．

１．てこの原理をトルクで表す

まず回転のつり合いすなわち「力が加わっても回転運動が変化しない」状況を観察する．





左図のように，天秤が支点 O のまわりにつり合いを保っている．支点から距離r_1の点P_1には，腕OP_1と直角に反時計回りの回転を引き起こそうとする力F_1が加わり，支点から距離r_2の点P_2には，腕OP_2と直角に反時計回りの回転を引き起こそうとする力F_2が加わる．天秤がつりあっているとき，「てこの原理」によって

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

が成り立つことは古来知られていた．この原理は，もちろんニュートンの運動法則から導かれるが，ここでは日常経験をもとにして「てこの原理」を一般的な形にする．

まず，右図のように力の作用点 P に加わる力 F の方向が，腕 OP と直角でないときを考察する．

$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_{||},\quad \vec{F}_{||} // \overrightarrow{OP} \equiv \vec{r},\quad \vec{F}_\perp \perp \vec{F}_{||},$$

とする．$\vec{F}_{||}$は O のまわりの回転を引き起こすことはない．そうすると，てこの原理に現れるrFという量は

$$rF = rF_\perp = \left|\vec{r} \times \vec{F}_\perp\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$

と表される．回転の方向（右ネジ）まで考慮すると，てこの原理は

$$\boxed{\vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = 0}$$

と書くことができる．

秤のような直線状の物体ではなく，面の広がりをもつ物体の様々な点に力が加わる場合でも（$\vec{r_1}$と$\vec{r_2}$が平行でない），てこの原理は$\vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = 0$と表される．さらにたくさんの力が加わるときも

$$\boxed{\sum_{k=1,\cdots N} \vec{r_k} \times \vec{F_k} = 0}$$

となる．

例題：物体中の 2 点間の作用反作用の法則を満たす力のペアは，回転の勢いを変える能力が無い．

解

作用反作用の法則を満たす力：$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0,\quad \vec{F}_{12} // (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\vec{r_1} \times \overrightarrow{F_{12}} + \vec{r_2} \times \overrightarrow{F_{21}} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \overrightarrow{F_{12}} = 0$$

例題：　$\vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = 0$が成り立ち物体が回転も移動もしないとき，本来の支点とは別の点 O’を原点にとると，ふたたび$\overrightarrow{r'_1} \times \vec{F_1} + \overrightarrow{r'_2} \times \vec{F_2} = 0$となる．

解

$\overline{\mathrm{OO'}} = \vec{R}$とすると$\vec{r} = \vec{R} + \overrightarrow{r'}$．本来の支点には，物体全体が動き出さないように$-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$が加わる．新しい支点O'から見たとき，この力は

$$-\vec{R} \times \left(-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\right) = \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

という効果をもつ．したがって

$$\overrightarrow{r'_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r'_2} \times \overrightarrow{F_2} + \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \left(\overrightarrow{r'_1} + \vec{R}\right) \times \overrightarrow{F_1} + \left(\overrightarrow{r'_2} + \vec{R}\right) \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2} = 0$$

トルク（力のモーメントともいう）$\vec{r} \times \vec{F}$

支点（回転の中心）から力の作用点までのベクトル$\vec{r}$と力のベクトル$\vec{F}$の外積，$\vec{r} \times \vec{F}$，は$\vec{F}$の向きに回転を引き起こす効果を表す．ベクトル$\vec{r} \times \vec{F}$の向きは支点とベクトル$\vec{F}$を含む面に垂直で回転方向にまわる右ネジが進む向きとなる．$\vec{r} \times \vec{F}$の大きさは，てこの原理に現れる力の効果を示す．てこの原理は「支点を中心とするトルクの和が０」となるが，さらに例題で学んだように，「任意の一点を中心とするトルクの和が０」と言うことができる．そして，もしトルクの和が0でないときは，回転運動が引き起こされる．

２．ニュートンの運動法則をトルクで書き直す

物体の運動はいかなる場合でもニュートンの運動法則

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\text{、} \qquad \vec{p} = m\,\vec{v} \quad \text{(運動量)}$$

にしたがう．

たとえば，この物体が原点を中心とする等速円運動をしているとしよう．等速円運動だから，物体に働く力が原点の方に向くことは既知である．すると，原点を中心とするとき力のトルクは０（位置ベクトルと力のベクトルが平行だから外積が０）．トルクが０なので，原点を中心とする回転の勢いは変化せず，等速円運動を続ける（回転状態が変化しない）ことになる．一方，もし円の接線方向に力が加わると，トルクは0ではなく，回転の勢いが変化する．

そこで，０でないトルクによって変化する「回転の勢い」を表す量を導くため，運動方程式 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$の両辺に左から$\vec{r}\times$を演算して外積をつくる：

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

右辺は原点を中心とする力のトルクである．左辺が$\frac{d}{dt}\square$という形（□の時間変化の割合）になれば，□を「回転の勢い」を表す量であるとしてよい．後に□を$\vec{\ell}$と書くことになり，$\vec{\ell}$を角運動量と呼ぶ.

ここでは先回りして

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

を与え，

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

を示そう．$\frac{d}{dt}\vec{\ell}$は$\frac{\Delta\vec{\ell}}{\Delta t}$の極限である．$\vec{r}$と$\vec{p}$が両方とも時間的に変化する：$\vec{r}(t)$と$\vec{p}(t)$.

$$\Delta\vec{\ell}=\Delta(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}(t+\Delta t)\times\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\times\vec{p}(t)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t)\simeq\vec{r}(t)+\frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t,\quad \vec{p}(t+\Delta t)\simeq\vec{p}(t)+\frac{d\vec{p}}{dt}\Delta t$$

$$\Delta\vec{\ell}\simeq\left\{\vec{r}(t)+\frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t\right\}\times\left\{\vec{p}(t)+\frac{d\vec{p}}{dt}\Delta t\right\}-\vec{r}(t)\times\vec{p}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t\times\vec{p}(t)+\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{p}}{dt}\Delta t,\qquad (\Delta t\text{の 2 乗は無視})$$

$$\vec{p}=m\vec{v}=m\frac{d\vec{r}}{dt}\text{ より }\frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t\times\vec{p}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t\times m\frac{d\vec{r}}{dt}=m\Delta t\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=0\quad(\text{外積の性質})$$

よって

$$\Delta\vec{\ell}\simeq\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{p}}{dt}\Delta t\quad\rightarrow\quad\frac{d\vec{\ell}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

こうして，ニュートンの運動法則は

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F},\qquad\text{ただし }\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}$$

と変形された．原点を中心とするトルクにより，原点を中心とする角運動量$\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}$が変化する．すなわち角運動量$\vec{\ell}$が原点を中心とする回転の勢いを表すと考えてよいことが分かる．

例題　半径rの円周上を速さvで運動する質量mの物体の，円の中心を原点とする角運動量の大きさを求めよ．円を上から見て，半時計回り回転のとき，角運動量ベクトルの向きは？
つぎに，円周上の一点を原点とする角運動量の大きさの最大と最小は？
解
円の中心を原点とすると，$\vec{r}\perp\vec{v}$だから$\vec{r}\perp\vec{p}$．よって$\left|\vec{\ell}\right|=|\vec{r}\times\vec{p}|=r\cdot p\sin\frac{\pi}{2}=rp=mrv$
$\vec{\ell}$の向きは，円を上から見て，手前に飛び出す方向.

注目する点を物体が通過するとき，その点からの距離が 0 となって，角運動量が 0 となる．その点を通る直径の反対側を物体が通過するとき，角運動量の大きさは$2mrv$で最大になる．なお，角運動量ベクトルの向きは常に「円を上から見て手前に飛び出す方向」

例題　速度$\vec{v}$で等速度運動する質量mの物体がある．原点から軌道への最短距離がaであるとき，この物体の原点を中心とする（「原点から見た」ともいう）角運動量の大きさは？
解
物体が軌道上のどの点にあっても，$\vec{r}\times\vec{p}$は一定の大きさmavである．直線運動なのに回転の勢いがあるのが不思議に思われるかもしれないが，原点から見てこの物体の運動を追尾すると，視線を回転する必要がある．原点から見ると，この物体は回転していると考えられる．なお，等速直線運動する物体に加わる力が 0 だから，この物体に加わるトルクも 0 であり，角運動量が一定となる．
もし，軌道上に原点があれば$(a=0)$，角運動量は常に 0 となる．

角運動量の和
いくつかの物体で構成される系に注目しよう．これらの物体の間には作用反作用の法則に従う内力と，外力が加わる：

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\cdots+\vec{F}_1^{(ex)},\quad \frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\cdots+\vec{F}_2^{(ex)}, etc$$

それぞれの物体の角運動量の時間的な変化は

$$\frac{d\vec{\ell}_1}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{r}_1\times\vec{F}_{13}+\cdots+\vec{r}_1\times\vec{F}_1^{(ex)},\quad \frac{d\vec{\ell}_2}{dt}=\vec{r}_2\times\vec{F}_{21}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{23}+\cdots+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^{(ex)}, etc$$

辺々の和ととると

$$\text{左辺の和}=\frac{d\vec{\ell}_1}{dt}+\frac{d\vec{\ell}_2}{dt}+\cdots=\frac{d}{dt}\left(\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2+\cdots\right)\equiv\frac{d}{dt}\vec{L},\qquad \vec{L}:\text{角運動量の和}$$

$$\text{右辺の和}=\left\{\left(\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{21}\right)+\left(\vec{r}_1\times\vec{F}_{13}+\vec{r}_3\times\vec{F}_{31}\right)+\left(\vec{r}_2\times\vec{F}_{23}+\vec{r}_3\times\vec{F}_{32}\right)+\cdots\right\}$$
$$+\left\{\vec{r}_1\times\vec{F}_1^{(ex)}+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^{(ex)}+\cdots\right\}$$

ここで，作用反作用の法則に従う内力は，$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}//(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$となり、外積の性質から$\left(\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{21}\right)=0$などとなることから

$$\text{右辺の和}=\left\{\vec{r}_1\times\vec{F}_1^{(ex)}+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^{(ex)}+\cdots\right\}$$

よって

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2+\cdots\right)=\vec{r}_1\times\vec{F}_1^{(ex)}+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^{(ex)}+\cdots}$$

となる．すなわち，物体の全角運動量（全体の回転の勢い）は内力により変化することはない．これを法則として表し

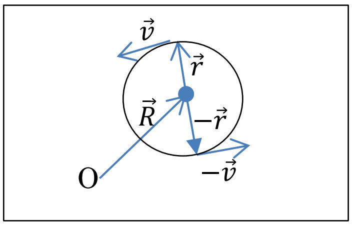
角運動量保存則：外部からの力のトルクが０のとき全角運動量が一定に保たれる．

と表現する．（ニュートンの運動法則の帰結である.）

例題　半径rの円の直径の両端に質量mの二個の物体があり，同じ向きに同じ速さvで回転する．円の中心を原点とする全角運動量の大きさを求めよ．この値は原点（角運動量を計算する基準点）の位置によらないことを確認せよ．

解

$$mrv+mrv=2mrv$$



図のように円と同じ面内に原点をとり，円の中心を$\vec{R}$とする．円の中心から円周上の一方の物体までのベクトルを$\vec{r}$とすると，他の物体までは$-\vec{r}$である．原点を中心とする角運動量の和は

$$\left(\vec{R}+\vec{r}\right)\times m\vec{v}+\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\times m(-\vec{v})=\vec{R}\times m\vec{v}+\vec{R}\times m(-\vec{v})+\vec{r}\times m\vec{v}+(-\vec{r})\times m(-\vec{v})=2m\vec{r}\times\vec{v}$$

例題　中心力（常に不動の一点に向かう力）で運動する物体は，力の中心のまわりの角運動量が一定に保たれることを示せ．ケプラーの第 2 法則（面積速度一定の法則）「惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である」を確認せよ．

例題　スケーターが，スピン中に手を広げると回転速度が落ちた．これを角運動量保存則から説明せよ．

例題　外力が地上付近の重力だけの場合，全角運動量が変化しないことを示せ．

３．剛体の回転と慣性モーメント（慣性能率）

剛体とは，その（内部も含めて）形を変えない物体のことである．剛体がある軸のまわりに回転するとき，剛体のどの部分も，その軸のまわりに同じ角速度で回転する．このことをもとにして，その剛体の全体の回転の勢い（角速度）や回転運動のエネルギーを簡便に表す方法がある．

ある剛体が回転軸のまわりに角速度ωで回転している．この剛体を微小な部分に分け，その第 k 番目の部分の回転軸からの距離がr_k，質量がm_kとする．この部分がもつ角運動量の大きさは

$$\ell_k = r_k \times p_k = r_k \times m_k v_k = r_k \times m_k (r_k \omega) = m_k r_k^2 \times \omega$$

である．角運動量ベクトルの向きは，回転軸と平行である．どの部分についてもωが共通なので，全体の角運動量ベクトルの和の大きさは

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\boldsymbol{k}} \ell_k = \sum_{\boldsymbol{k}} (m_k r_k^2 \times \omega) = \left(\sum_{\boldsymbol{k}} m_k r_k^2 \right) \times \omega$$

となる．$\sum_{\boldsymbol{k}} m_k r_k^2$の値は，剛体の形と質量の分布状態と回転軸の位置や向きによって決まるが，回転速度にはよらない．言い換えると，回転軸と剛体が決まると，決まってしまう量である．この量を慣性モーメント（慣性能率）といい，Iと表す．上の式は

$$L = I\omega$$

となる．運動量＝質量×速度，という関係に対応して，角運動量＝慣性モーメント×角速度，となっている．

つぎに，剛体の回転運動のエネルギーは，第 k 番目の部分がもつ運動エネルギーの和である．すなわち

$$E_K = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\boldsymbol{k}} m_k r_k^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

となる．ここでも，$\frac{1}{2}mv^2$に対して，質量のかわりに慣性モーメント，速度のかわりに角速度を用いた形となっている．

このように，剛体の回転運動では，慣性モーメントが（位置のかわりに回転角を座標としたときの）質量に相当する役目を担う．

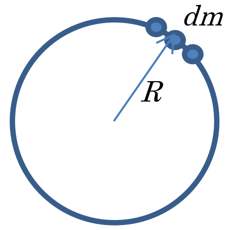
例題　質量 M，半径 R のリングがある．リングの中心をリングの面と垂直に貫く軸のまわりの慣性モーメントを計算せよ．M=1 kg，R=1 m，ω=2π rad/s のとき，角運動量と回転運動のエネルギーを計算せよ．

解

リングを N 個の微小部分に分割すると，1 個の質量が dm = M/N　である．この部分は回転軸からの距離が R だから，微小な慣性モーメントは $dm \times R^2$ となる. 全部を集めると

$I = N \times dm\, R^2 = MR^2$

となる．



$$I = (1\ \mathrm{kg}) \times (1\ \mathrm{m})^2 = 1\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$L = I\omega = \ 2\pi\ \mathrm{kg\ m^2/s} = 2\pi\ \mathrm{J\ s}$$ (単位の最終表記には rad を残さない),

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\ (1\ \mathrm{kg\ m^2})(2\,\pi\ \mathrm{rad/\ s})^2 = 2\pi^2\ \mathrm{kg\ m^2/s^2} = \ 2\pi^2\ \mathrm{J}$$

慣性モーメントがもつ様々な性質は，物体の運動のシミュレーションを行うときの基本であり，2 年 1 学期に開講される続編の力学で学ぶ予定である．