Chapt.2
運動の記述

ニュートンの力学　＝　物体の運動の科学

数学的に表現された法則
法則の数学的な取り扱いによる推論・展開

§ 2.1 物体・位置・時間の記述
[1] 質点

- 現実の物体：大きさ・形・内部構造がある

  ↓ 抽象化，理想化，数学的取り扱いが簡便

- 質点：質量をもつ点（大きさを無視できる物体）

  ↓ 現実の物体のモデルとしては

- 質点系：質点が集まり一体として機能するもの

Q2-1

(A) 個々の惑星の公転（太陽のまわりを回る）運動を考えるとき，惑星を質点と考えてよい．その理由を考えよ．

(B) 地球を回る人工衛星の公転運動を考えるとき，地球を質点と考えると，誤差が生じる．その理由を考えよ．

A2-1

(A) 惑星は，その公転運動を扱うとき，質点としてよい

- 惑星の公転運動は，主として太陽（および他の惑星）が及ぼす力により生じる．太陽と惑星の距離は，惑星の大きさ（たとえば半径）に比べて非常に大きい．したがって，惑星を大きさを無視できる点と考えてよい．

(B) 人工衛星の運動では，地球を質点と考えるのは無理がある

- 人工衛星は地球からの引力で運動するが，地球の内部構造（海洋，陸地，球形からのずれなど）のため，軌道上の位置によって異なる引力を受ける．

- もし地球の質量分布が球対称であれば，同じく球対称の衛星との間に作用する力は，互いにどんなに近くても，2個の質点の間に作用する引力と考えてよいことが積分によって示される．

[2] 座標系と座標

- 物体の運動を数学的にあつかう

  どこに → 位置，　いつ → 時間（時刻）

- 直交座標系
  - （x軸，）xy軸，xyz軸
  - 要件：原点，基準の方向，基準の長さ
  - 座標：(x, y)，(x, y, z)

- 極座標系
  - 惑星の運動など，中心力による回転運動の解析に必須

[3] 時間

- 時間とは何か？
  - 測定の方法よる定義
    - その量を測定できれば実用上の支障はない

- 周期現象の利用
  - 天体現象：地球の公転，自転，月の公転
  - 人工的な周期現象：砂時計，水時計
  - 振り子運動：　振り子時計，テンプ時計
  - 固体の共振：　コーツ時計
  - 原子時計

時間と長さの単位

- 物理量の大きさ:基準の何倍かを測定して決める

- 単位:基準の量
  - 長さの単位: 1 m
  - 時間の単位: 1 s
  - 例:1 m の 5倍の長さ 5 × 1 m を 5 mと書く.

- 国際単位系 SI

§ 2.2 直線運動
[1] 運動の記述

- 質点の運動に関する情報:
  - いつ, どこにいるか, 関数による表現: $x(t)$

- 問題意識
  - なぜ, そのような運動をするか
  - 基本法則から, その運動を数学的に導き出せるか
  - その運動の将来を予測できるか

- 運動にかかわる基本概念
  - 位置, 変位
  - 速度
  - 加速度 ⇔ 力

[2] 速度　v

- 変位：位置の変化

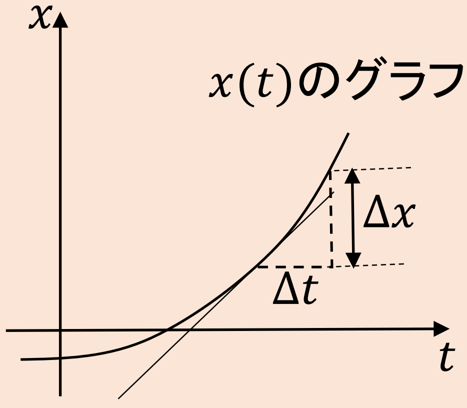
$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \qquad \Delta t > 0$$

  - 時刻 t から $t+\Delta t$ までの移動
  - 符号で移動の向きを表す

- 速度：位置を時間で微分する
  - 位置の時間的変化の割合
  - 単位時間 あたりの位置の変化：

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to v(t) = \frac{dx}{dt}$$

  - 単位：m/s



- 平均速度
- 速さ　　$s = |v|$

例題 2.2

- ポイント
  - 日常的に用いる単位とSI単位の変換
  - 速度の向き

- km, m, cm, mm, ⇔ m
- yr, day, h, min, s ⇔ s

- 36 km/h = 10 m/s
  - 同じ量が異なる数値で表現される

[2] 速度から変位を求める

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}} \rightarrow \quad v(t)\,dt = \frac{dx}{dt}\,dt = dx$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} v\,dt}_{\text{微分すると}v\text{になるもの}} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt}_{\text{微分すると}\frac{dx}{dt}\text{になるもの}} = x(t) - x(t_0)$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt}$$

[3] 加速度 a

- 加速度：
  - 運動の法則は加速度を用いて表現される
  - 速度を時間で微分する
    - 速度の時間的変化の割合
    - 単位時間あたりの速度の変化

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \to a(t) = \frac{dv}{dt}$$

    - 単位：m/s², m s⁻²
- 平均の加速度
- 加速度の大きさ　　$|a|$

例題　2.3

- 微分法により，位置⇒速度⇒加速度を求める

- 等加速度運動:　$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma$
    - α, β, γのSI単位は？
    - $t - x$図は？　$t - v$図は？
    - $x(0), v(0)$は？
- 単振動:　$x = A\cos\omega t$
    - A, ωのSI単位は？
    - $t - x$図は？　$t - v$図は？
    - $x(0), v(0)$は？

[3] 加速度から速度を求める

参照 : $v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt}$$

例題 2.4

- 問題文からv- t図を描け．図2.9と同じになった？

- 数値の桁を表す0を区別する記法
  - 例：1.20×10^4（0.120×10^5）
    - 有効桁数 3桁
    - 有効数字 1.20

- 測定値は「ばらつく」
  - 平均値とばらつく範囲とを併記する
  - 責任をもって主張できない数字は書かない
    - 1.20:   1.201, 1.203, 1.198, 1.200,1.197….,
    - 1.200±0.003

§2.3 自由落下･重力加速度

地上付近の物体は加速度gで鉛直下向きに落下

- 直線運動
  - 座標軸: 鉛直下(上)向きに x軸
  - $\frac{d^2x}{dt^2} = g$,　　　　　等加速度運動
  - $v = \frac{dx}{dt} = gt$,　初速度を0とした
  - $x = \frac{1}{2}gt^2$,　　　　　初期位置を原点とした
- 重力加速度の値
  - $g \simeq 9.8\, m^2/s^2$

Q 2-2

自由落下について

[A] x軸を上向きにとったら，どんな式？

[B] ストロボ写真から加速度を求める手順は？

A 2-2

[A] $\frac{d^2x}{dt^2} = -g \to v = -gt,\ x = -\frac{1}{2}gt^2$

[B] $t_k = k \times \Delta t,\ \Delta t$:ストロボ間隔, $k = 0,1,2,\ldots$

$x_k = x(t_k) = \frac{1}{2}g(k\Delta t)^2 = \left(\frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2\right)k^2$:質点の撮影位置

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \left(\frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2\right)\{(k+1)^2 - k^2\} = \left(\frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2\right)(2k+1)$$

$$g = \frac{2(x_{k+1} - x_k)}{(2k+1)(\Delta t)^2}$$

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_k - \Delta x_{k-1} = \left(\frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2\right)\{(2k+1) - (2k-2+1)\} = g \cdot (\Delta t)^2$$

$$g = \frac{\Delta^2 x_k}{(\Delta t)^2} = \frac{(x_{k+1} - x_k) - (x_k - x_{k-1})}{(\Delta t)^2} = \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{(\Delta t)^2}$$

例題 2.5

- x軸：鉛直下向き，初速度0，初期位置は原点
  - $\frac{d^2x}{dt^2} = g, v(0) = 0, x(0) = 0 \to v_c = gt_c$，$x_c = \frac{1}{2}gt_c^2$

- $x_c = x(t_c) = 55\ \mathrm{m}, g = 9.8\ \mathrm{m/s} \ \to \ t_c, v_c$ ？
  - $t_c = \sqrt{\frac{2x_c}{g}}, \qquad v_c = g\sqrt{\frac{2x_c}{g}} = \sqrt{2x_c g}$

- 途中の計算結果を使わず，与えられた値で計算

例題 2.6

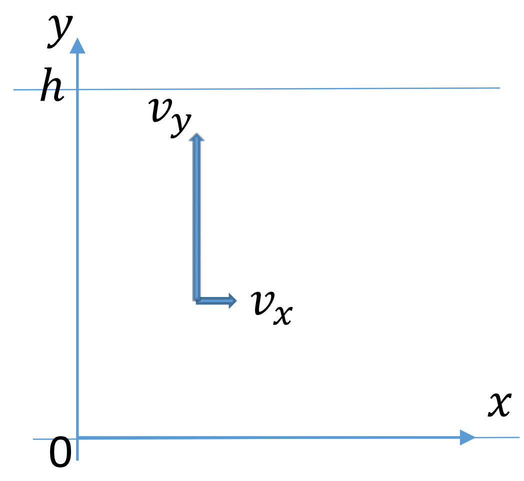
- x軸:鉛直上向き，原点地表
  - $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$，初期位置 $x(0) = h$，初速度 $v(0) = v_0 (> 0)$
    - $v(t) = -gt + v(0) = -gt + v_0$，$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$
  - 地面に衝突
    - $x(t_c) = 0$，$t_c > 0$
    - $x(t_c) = -\frac{1}{2}gt_c^2 + v_0 t_c + h = 0 \rightarrow \quad t_c = \frac{1}{g}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right)$
    - $v(t_c) = -gt + v_0 = -\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right) + v_0 = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

§ 2.4 空間運動：直交座標による記述

- 直交座標系では，各成分ごとの1次元運動に還元
  - 位置:　　$x(t), y(t), z(t)$
    - 原点からの距離：$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - 速度:　　$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$
    - 速度の大きさ（速さ）：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
  - 加速度：$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}$
    - 加速度の大きさ：$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

例題 2.7

- 流れに直交して川を渡る船の運動
  - 座標軸をとる
  - 川岸から見るときの速度の成分
    - $v_x = 1.8\ \mathrm{km/h}, \quad v_y = 9.0\ \mathrm{km\ /h}$
  - 渡河: $y(t_\mathrm{f}) = v_y t_\mathrm{f} = h$
    $x(t_\mathrm{f}) = v_x t_\mathrm{f} = \dfrac{v_x}{v_y} h$
  - 速さ: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$



例題2.8

- 円運動の角速度 ω
  - 角速度の定義

    Δtに$\Delta\theta$だけ反時計回りに回転: $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$
  - 等速円運動の周期Tと角速度

    $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \to \quad \Delta\theta = \omega\Delta t \quad \to \theta = \omega t + \theta_0 \quad \to 2\pi = \omega T \quad \to \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- 円周上を一定の角速度で反時計回りに回転する

  $$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,\ \ \theta = \omega t \quad \to \quad x(t) = r\cos\omega t\,, y(t) = r\sin\omega t$$

- 速度，加速度：$\theta = \omega t, \frac{d\theta}{dt} = \omega$

  $$v_x(t) = -r\omega\sin\omega t\,, \qquad v_y(t) = r\omega\cos\omega t$$

  $$a_x(t) = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x, \qquad a_y(t) = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y$$

  $$\boxed{v = r\omega, \qquad a = r\omega^2}$$