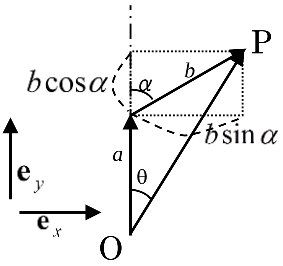
３章

1．点Oから真北に a だけ進み、ついで進路を真北から東側角度 α の方向にかえ，さらに b だけ進んだ。出発点からみて到達点 P はどの方角になるか。また OP の距離はいくらか。ベクトル表示と内積を用いて答えよ。



真東への単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$、真北への単位ベクトルを $\mathbf{e}_y$ とすると、最初の変位はベクトル $a\mathbf{e}_y$ で表される。次の移動は、$\mathbf{e}_\mathbf{y}$の方向（東）に$b\sin\alpha$ 進んだあと$\mathbf{e}_\mathbf{x}$の方向（北）に$b\cos\alpha$ 進むのと結果的には同じ変位だから、ベクトル $b\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + b\cos\alpha\,\mathbf{e}_y$ で表される。したがって O から P への変位（ベクトル$\mathbf{c}$とする）は、これら２つのベクトルの和となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{c} = a\mathbf{e}_y + \left(b\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + b\cos\alpha\,\mathbf{e}_y\right) = b\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + (a + b\cos\alpha)\mathbf{e}_y$$

と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の長さ OP は，自分自身との内積の平方根に等しい．単位ベクトル$\mathbf{e}_x$と$\mathbf{e}_\mathbf{y}$は（「単位」ベクトルだから長さが 1）それぞれ東西方向と南北方向なので互いに直交するから内積は 0 である．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(b\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + (a+b\cos\alpha)\mathbf{e}_y\right)\cdot\left(b\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + (a+b\cos\alpha)\mathbf{e}_y\right)\\
&= (b\sin\alpha\,)^2\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x + (a+b\cos\alpha)^2\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_y + 2(b\sin\alpha)(a+b\cos\alpha)\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y\\
&= (b\sin\alpha\,)^2\times 1 + (a+b\cos\alpha)^2\times 1 + 2(b\sin\alpha)(a+b\cos\alpha)\times 0\\
&= b^2\sin^2\alpha + a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha
\end{aligned}$$

同じことは，OP を斜辺とする直角三角形にピタゴラスの定理を適用しても，直ちに計算できる．こうして

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}=|\mathbf{c}| = c = \sqrt{(b\sin\alpha)^2 + (a+b\cos\alpha)^2} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の真北からの角度を$\theta$とすると「真北を向く単位ベクトル$\mathbf{e}_y$との内積が」

$\mathbf{e}_y \bullet \mathbf{c} = |\mathbf{c}|\times 1\times\cos\theta$となる。角度$\theta$の$\cos\theta$の値を答えることにする（コサインの値がわかれば、そのあとは表を見るなどしてθの値を求めることができる）と、$|\mathbf{c}|$すなわち OP の距離を先に知っておく必要があることがわかる。この距離は

３章

$$\mathrm{OP}=|\mathbf{c}|=c=\sqrt{(b\sin\alpha)^2+(a+b\cos\alpha)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$

である。内積をとるときに$\mathbf{e}_x$と$\mathbf{e}_y$が正規直交系（$\mathbf{e}_x\bullet\mathbf{e}_y=0$, $\mathbf{e}_x\bullet\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{e}_y=1$）をつくっていることを用いると

$$\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{c}=(b\sin\alpha)(\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{e}_x)+(a+b\cos\alpha)(\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{e}_y)=(b\sin\alpha)\times 0+(a+b\cos\alpha)\times 1$$

$$=a+b\cos\alpha$$

内積$\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\times 1\times\cos\theta$の式から

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{e}_y\bullet\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|\times 1}=\frac{a+b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$$

を得る。

2.　3 次元の場合の正規直交系$\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$について正規直交関係を書け。

補足説明なし。

3.　等角速度とは限らない一般の円運動において位置ベクトルを$\mathbf{r}$、速度ベクトルを$\mathbf{v}$、加速度ベクトルを$\mathbf{a}$とすると

$$\mathbf{r}\bullet\mathbf{a}=-\mathbf{v}^2$$

が成り立つことを示せ。

円の半径をRとすると、円の中心を原点とし円周上の質点の位置ベクトル$\mathbf{r}$の長さがRに等しい。この条件を$|\mathbf{r}|=R$と書いてもよいのだが、絶対値記号は微分など演算の対象にはなりにくいため、内積を用いて書き直すことにする。$\mathbf{r}$と$\mathbf{r}$の内積をつくると、同一のベクトルだから、なす角が 0、そのコサインが 1 となるので　$\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\times|\mathbf{r}|\times\cos 0=|\mathbf{r}|^2$である。質点が時間とともに位置を変えるので$\mathbf{r}$は時間の関数となる。このことを$\mathbf{r}(t)$と表す。以上をまとめて

$$\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}(t)=|\mathbf{r}(t)|^2=R^2=\text{一定}$$（時間によって変化しない定数）　　（▲）

となる。

３章

この式の両辺を時間で微分する。$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{e}_x+y(t)\mathbf{e}_y$ として左辺の内積を成分で表すと

$$\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}(t)=|\mathbf{r}(t)|^2=x(t)^2+y(t)^2$$

であり、この両辺を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\bullet\mathbf{r})=\frac{d}{dt}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)=\frac{d}{dt}x^2+\frac{d}{dt}y^2=\frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$

となる。最右辺で $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ は質点の速度ベクトル $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の各成分である。この辺は「$\mathbf{r}$ の X 成分と $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の X 成分の積の 2 倍」と「$\mathbf{r}$ の Y 成分と $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の Y 成分の積の 2 倍」の和だから、ベクトル $\mathbf{r}$ と $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の内積を用いて書き直せる。すなわち

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\bullet\mathbf{r})=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2\left(\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$

である。同じベクトルどうしの内積を $\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}=\mathbf{r}^2$ のように書くと、上式は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2=2\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (◎)$$

と書き直せる。この式の書き方は、ベクトルではない関数の（合成関数の）微分法

$$\frac{d}{dt}x(t)^2=2x(t)\frac{dx}{dt}$$

と似た書き方になっている（もちろん、この関係を基礎として導かれた）。

証明は省略するが、異なるベクトル $\mathbf{f}(t)$ と $\mathbf{g}(t)$ の内積をつくり、それを時間微分すると

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\bullet\mathbf{g})=\mathbf{f}\bullet\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d\mathbf{f}}{dt}\bullet\mathbf{g} \qquad (◎◎)$$

である（簡単だから各自確かめよ）。$\mathbf{f}=\mathbf{g}=\mathbf{r}$ のとき、式（◎）と同じもの。

式（◎）の左辺は、式（▲）から「定数を微分して 0」となるので、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2=2\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$$

以上をまとめると、$\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}(t)=R^2$ ＝一定より、その両辺を微分して

$$\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$$

式（◎◎）を用いて、左辺を再度微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\mathbf{r}\bullet\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

右辺は 0 だから微分しても 0、しがたって

３章

$$\mathbf{r} \bullet \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

この式で、速度ベクトルを $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$、加速度ベクトルを $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}$ と書き直し、移項すると

$$\mathbf{r} \bullet \mathbf{a} = -(\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) = -\mathbf{v}^2$$

である。

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$ は「同じベクトルどうしの内積＝その長さの２乗、常に正か 0」なので、$\mathbf{r} \bullet \mathbf{a}$ は常に負(あるいは 0)である。２つのベクトルの内積は「長さ×長さ×なす角のコサイン」、長さは常に正なので、内積の符号はコサインの符号と一致する。なす角が 0°から 90°の間で（「だいたい」同じ向き）コサインが正となる。90°と 180°の間で（「だいたい」反対向き）負となる。コサインが 0 のときは完全に直交している。$\mathbf{r} \bullet \mathbf{a} \leq 0$ の符号から言えることは、位置ベクトル（円の中心から円周上の質点に向かう＝円の外側を向く）と加速度の向きとが「だいたい」反対向き、言い換えると加速度ベクトルは常に円の内側を向く。もし

半径の大きさ×加速度の大きさ＝速度の大きさの二乗

となれば、加速度は円の中心を向く。一般的には

半径の大きさ×加速度の大きさ×なす角のコサイン＝（-1）×速度の大きさの二乗

となり、コサインの値が－１（ちょうど反対向き、反平行という）になるとは限らない。いいかえると、加速度が中心を向くとは限らない。より正確に言うと、円運動する質点の加速度は、中心を向く加速度の成分と円の接線方向の成分に分解され、等角速度の場合には接線方向成分が 0 になる。

4. 原点を中心とし，半径 R で，回転角が時間の関数として $\varphi = \varphi(t)$ と与えられている一般の円運動の位置ベクトルr, 速度ベクトルv, 加速度ベクトルaはどう表されるか.

位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = R\cos\varphi(t)\,\mathbf{e}_x + R\sin\varphi(t)\,\mathbf{e}_y\,,\quad r = |\mathbf{r}| = R = \text{一定}$$

両辺を時間で微分して

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R\left(-\frac{d\varphi}{dt}\right)\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\varphi\ \mathbf{e}_y = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\{-\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y\}$$

もう一度微分して加速度ベクトルは

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\{-\cos\varphi\ \mathbf{e}_x - \sin\varphi\ \mathbf{e}_y\} + R\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\{-\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y\}$$

$$= -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \mathbf{r} + \ R\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\{-\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y\} = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \mathbf{r} + \frac{\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}\mathbf{v}$$

等角速度ならば$\frac{d\varphi}{dt}$ =一定だから$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$となるが，いまは等角速度ではないから$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \neq 0$となり，加速度ベクトルには半径方向の成分だけでなく速度ベクトル（したがって円の接線方向）の方向の成分が生じる．

5. ある質点の運動が

$$\mathbf{r}(t) = (2R\cos(\omega t))\mathbf{e}_x + (R\sin(\omega t))\mathbf{e}_y$$

で表される。この運動の速度ベクトルと加速度ベクトルおよび両者のなす角度を求よ。また、この運動のホドグラフを図示せよ。ここでR, ωは時間によらない定数で、$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$はそれぞ$x, y$方向の単位ベクトルである。

位置ベクトル

$$\mathbf{r}(t) = (2R\cos(\omega t))\mathbf{e}_x + (R\sin(\omega t))\mathbf{e}_y \qquad (■)$$

において時間的に変化する部分は各方向の成分だけ（$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$は時間的に一定）だから

$$\frac{d}{dt}(2R\cos\omega t) = 2R\frac{d}{dt}\cos\omega t = -2\omega R\sin\omega t \text{、} \quad \frac{d}{dt}(R\sin\omega t) = R\frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega R\cos\omega t$$

より、速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-2\omega R\sin\omega t)\mathbf{e}_x + (\omega R\cos\omega t)\mathbf{e}_y = -\omega(2R\sin\omega t)\mathbf{e}_x + \omega(R\cos\omega t)\mathbf{e}_y \qquad (■■)$$

再度微分して、加速度ベクトルは

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-2\omega^2 R\cos\omega t)\mathbf{e}_x + (-\omega^2 R\sin\omega t)\mathbf{e}_y = -\omega^2[(2R\cos\omega t)\mathbf{e}_x + (R\sin\omega t)\mathbf{e}_y] = -\omega^2\mathbf{r}$$

ベクトル$\mathbf{v}$の大きさをv、ベクトル$\mathbf{a}$の大きさをaとしたとき、両ベクトルのなす角をθとすると内積は

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = v \times a \times \cos\theta \qquad (▼)$$

と表せる。同じ内積を「両ベクトルの対応する成分の積の和」として計算すると

３章

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\bullet\mathbf{a} &= \left(-2\omega R\sin\omega t\right)\times\left(-2\omega^2 R\cos\omega t\right)+\left(\omega R\cos\omega t\right)\times\left(-\omega^2 R\sin\omega t\right)\\
&= 4\omega^3 R^2\sin\omega t\times\cos\omega t+\omega^3 R^2\cos\omega t\times\left(-\sin\omega t\right)\\
&= 4\omega^3 R^2\sin\omega t\times\cos\omega t-\omega^3 R^2\cos\omega t\times\sin\omega t
\end{aligned}
$$

$$
=3\omega^3 R^2\sin\omega t\cos\omega t=\frac{3}{2}\omega^3 R^2\left(2\sin\omega t\cos\omega t\right)=\frac{3}{2}\omega^3 R^2\sin 2\omega t
$$

となる。また各ベクトルの大きさを成分を用いて計算すると

$$
v=\sqrt{\left(-\omega\times 2R\sin\omega t\right)^2+\left(\omega\times R\cos\omega t\right)^2}=\omega R\sqrt{4\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}=\omega R\sqrt{3\sin^2\omega t+1}
$$

$$
a=\sqrt{\left(-\omega^2 2R\cos\omega t\right)^2+\omega^2\left(R\sin\omega t\right)^2}=\omega^2 R\sqrt{4\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}=\omega^2 R\sqrt{3\cos^2\omega t+1}
$$

である。式（▼）を $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{a}}{v\times a}$ と書き直して上に計算した値を代入すると

$$
\cos\theta=\frac{\frac{3}{2}\omega^3 R^2\sin 2\omega t}{\omega R\sqrt{3\sin^2\omega t+1}\times\omega^2 R\sqrt{3\cos^2\omega t+1}}=\frac{3}{2}\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{\left(1+3\sin^2\omega t\right)\left(1+3\cos^2\omega t\right)}}
$$

$$
=\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{4\times\left(1+3\sin^2\omega t+3\cos^2\omega t+9\sin^2\omega t\cos^2\omega t\right)}}=\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{4\times\left(1+3+9\sin^2\omega t\cos^2\omega t\right)}}
$$

$$
=\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\times\left(2\sin\omega t\cos\omega t\right)^2}}=\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\sin^2 2\omega t}}
$$

となる。角度そのものでなくそのコサインを求めて終了とする。

この質点の軌道は式（■）

$$
\mathbf{r}(t)=\left(2R\cos(\omega t)\right)\mathbf{e}_x+\left(R\sin(\omega t)\right)\mathbf{e}_y
$$

の x, y 成分から時刻 t を消去すると

$$
\begin{cases} x=2R\cos(\omega t)\\ y=R\sin(\omega t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{2R}=\cos(\omega t)\\ \dfrac{y}{R}=\sin(\omega t)\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{x}{2R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2=1
$$

すなわち x 方向を長軸、y 方向を短軸とし、長半径 $2R$ 、短半径 R の楕円で $t=0$ に質点は

$$
x(0)=2R\cos 0=2R,\quad y(0)=R\sin 0=0
$$

より x 軸上正の部分にいて、位置ベクトルの先端の点 $\left(2R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)\right)$ は点 $\left(\cos\omega t, \sin\omega t\right)$ と同じように回転するから反時計回り。

３章

ホドグラフ（各時刻の速度ベクトルを同じ始点から描いたときの先端の軌跡）は、速度ベクトルの式（■■）

$$\mathbf{v} = -\omega(2R\sin\omega t)\mathbf{e}_x + \omega(R\cos\omega t)\mathbf{e}_y$$

の各成分から時刻tを消去すると

$$\begin{cases} v_x = -2\omega R\sin(\omega t) \\ v_y = \omega R\cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-v_x}{2\omega R} = \sin(\omega t) \\ \dfrac{v_y}{\omega R} = \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{-v_x}{2\omega R}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\omega R}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{v_x}{2\omega R}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\omega R}\right)^2 = 1$$

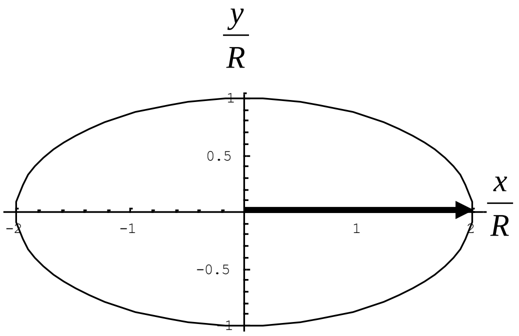
よりx方向を長軸、y方向を短軸とし、長半径$2\omega R$、短半径ωRの楕円で$t=0$に速度ベクトル$\mathbf{v}$は

$$v_x(0) = -\omega 2R\sin 0 = 0, \qquad v_y(0) = \omega R\cos 0 = \omega R$$

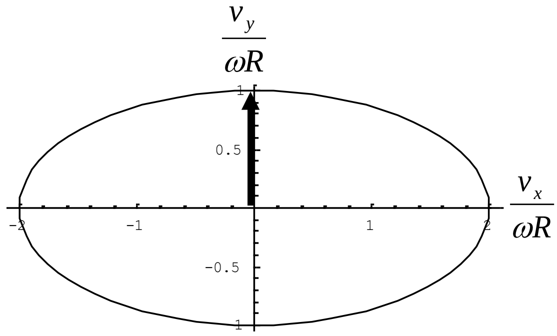
よりy軸上正の方向を向いて、ベクトルの先端の点

$$\left(-2\omega R\sin(\omega t), \omega R\cos(\omega t)\right) = \left(2\omega R\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \omega R\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

は点$(\cos\omega t, \sin\omega t)$と同じように回転するから、時間とともに反時計回り。



軌道



ホドグラフ

矢印は t=0 におけるベクトル

6. 鉛直方向に速さ$4.0\,\mathrm{m/s}$で落下している雨粒を、時速 36.0 km で水平方向に直線運動している電車の中から見たとき、雨粒の速度と速さはどのように見えるか。

雨粒の速度は静止系から見たもの。このとき水平方向にx軸（電車の進行方向を正）、鉛直上方にy軸をとる。雨粒の速度は$v_x = 0$、$v_y = -4.0\,\mathrm{m/s}$。この静止系で見たとき電車の

３章

速度は y 軸方向に $V=\dfrac{36\times10^3\,\mathrm{m}}{60\times60\,\mathrm{s}}=10\,\mathrm{m/s}$ （有効数字２桁）。

次に電車に固定した座標系で進行方向に x' 軸、鉛直上方に y' 軸をとると、この座標系から見た雨粒の速度は式(3.85)と同様に

$$v'_x=v_x-V\text{、}\qquad v'_y=v_y$$

より

$$v'_x=(0-10)\mathrm{m/s}=-10\mathrm{m/s}\ \text{（有効２桁）および}\quad v'_y=-4.0\,\mathrm{m/s}$$

となる。その大きさは

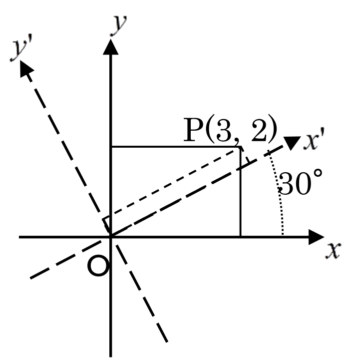
$$v'=\sqrt{{v'_x}^2+{v'_y}^2}=\sqrt{(-10)^2+(-4)^2}\,\mathrm{m/s}=\sqrt{116}\,\mathrm{m/s}=10.8\,\mathrm{m/s}=11\,\mathrm{m/s}$$

7.　２次元直交座標系 O_{xy} で点 P の座標は(3, 2)である。座標軸を正の方向（反時計方向）へ 30°回転した座標系 $O_{x'y'}$ での点 P の座標 (x',y') を求めよ。

本問の状況は教科書 48 頁②と全く同じであり、同一の位置の「反時計回りに Θ だけ回転した後の座標系での座標」と「回転前の座標系での座標」の関係は、式(3.70)と(3.71)

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta$$
$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

で与えられる。



Θ=30°=Π/6、$x=3, y=2$ とおいて

$$x'=x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}x+\frac12y=\frac{\sqrt3}{2}\times3+\frac12\times2=\frac{3\sqrt3+2}{2}$$

$$y'=-x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}=-\frac12x+\frac{\sqrt3}{2}y=-\frac12\times3+\frac{\sqrt3}{2}\times2=\frac{2\sqrt3-3}{2}$$

以上まとめて $(x',y')=\left(\dfrac{3\sqrt3+2}{2},\dfrac{2\sqrt3-3}{2}\right)$。P の座標(3, 2)の値は「どこまでも正しい数値である」としている。

8.　座標系 O_{xy} と座標系 $O_{x'y'}$ は原点を共有し、$O_{x'y'}$ は O_{xy} に対して等角速度 ω で反時計方向に回転している。時刻 $t=0$ で両座標系は重なっていた。O_{xy} から見て座標 (a,b) の点に静止している質点の、$O_{x'y'}$ から見た位置、速度、加速度を a,b,ω で表せ。

３章

$O_{x'y'}$が回転運動をしているか否かにかかわらず、図.15 のように、ある瞬間にx'軸がx軸から角 Θ だけ傾いているとき、ある点の各座標系における座標(x', y')と(x, y)の関係は式(3.70)(3.71)

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

で表される。回転しているときは、Θ を時刻 t の関数として表す。この問では$\theta(t) = \omega t$である。なぜなら、回転の角速度が ω、t=0 でx'軸とx軸が重なっている：$\theta(0) = 0$から。

したがって$(x, y) = (a, b)$のとき，$O_{x'y'}$系での位置座標は

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t = -a\sin\omega t + b\cos\omega t \qquad (+)$$

である。$O_{x'y'}$系での速度はx', y'を時間微分して（a, b, ωはすべて定数）

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = \omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$
$$v'_{y'} = \frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) = -\omega(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

加速度は再度微分して

$$a'_{x'} = \frac{dv_x'}{dt} = \omega\frac{d}{dt}(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) = -\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$
$$a'_{y'} = \frac{dv_y'}{dt} = -\omega\frac{d}{dt}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = -\omega^2(-a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

たとえばO_{xy}系でx軸上の点（$b = 0$）に注目すると、式(+)は、

$$x' = a\cos\omega t = a\cos(-\omega t)\text{、} \qquad y' = -a\sin\omega t = a\sin(-\omega t)$$

となる。静止した系から見て反時計方向に回転にしている点の座標（例題 3.5 の式(3.50)）と比較すると、O_{xy}系で静止している点は$O_{x'y'}$系では座標系の回転と反対向きに円運動しているように見える。

9. 式(3.38)を内積の定義と考えて、内積の性質(3.16)～(3.18)を証明せよ。

（3.16） $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = \mathbf{B}\bullet\mathbf{A}$

２つの実数の積は、かける順序を変えても同じ値である（実数の積の交換則）から

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \text{ :内積の定義}$$
$$= B_xA_x + B_yA_y + B_zA_z\text{: 実数の積の交換則}$$
$$= \mathbf{B}\bullet\mathbf{A} \text{：内積の定義}$$

３章

(3.17) $\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}+\mathbf{A}\bullet\mathbf{C}$

実数の分配則と和の交換則を使うと

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}+\mathbf{C})&=A_x(B_x+C_x)+A_y(B_y+C_y)+A_z(B_x+C_y):\text{内積の定義}\\&=A_xB_x+A_xC_x+A_yB_y+A_yC_y+A_zB_z+A_zC_z:\text{ 実数の分配則}\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z+A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z:\text{実数の和の交換則}\\&=\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}+\mathbf{A}\bullet\mathbf{C}:\text{内積の定義}\end{aligned}$$

(3.18) $(\lambda\mathbf{A})\bullet\mathbf{B}=\mathbf{A}\bullet(\lambda\mathbf{B})=\lambda(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})$

ベクトルの成分表示の場合に、スカラー倍を定義しておく必要がある。そのため、以下の考察をしておく。

　まず、あるベクトルの成分をどれもλ倍しても、成分の比は同じである。すなわち

$$A_x:A_y:A_y=\lambda A_x:\lambda A_y:\lambda A_y$$

一方、成分の比が同じベクトルは、同じ向きか反対向きであるから、成分がどれも同じ実数λ倍されたとき、ベクトルの向きは同じか反対になるだけ。

　つぎに、ベクトルの長さは

$$\sqrt{(\lambda A_x)^2+(\lambda A_y)^2+(\lambda A_z)^2}=\lambda\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

よりλ倍となる。

　ベクトル $\mathbf{A}$ のスカラー（実数）λ倍、$\lambda\mathbf{A}$、はベクトル $\mathbf{A}$ の向きがそのままで大きさがλ倍になったものである（教科書３４頁）と定義されているので、各成分をλ倍するとベクトルのλ倍となる。

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{A})\bullet\mathbf{B}&=(\lambda A_x)B_x+(\lambda A_y)B_y+(\lambda A_z)B_z\\&=\lambda A_xB_x+\lambda A_yB_y+\lambda A_zB_z:\text{積の結合則}\\&=A_x\lambda B_x+A_y\lambda B_y+A_z\lambda B_z:\text{交換則}\\&=A_x(\lambda B_x)+A_y(\lambda B_y)+A_z(\lambda B_z)=\mathbf{A}\bullet(\lambda\mathbf{B})\\&=\lambda(A_xB_x)+\lambda(A_yB_y)+\lambda(A_zB_z)=\lambda(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})\end{aligned}$$

(3.19) $|\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}|\le AB$

教科書にはスマートな解答が与えられているので、ここでは「直接に力づく」で証明しよう。証明すべき式は

３章

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \le \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

右辺は常に正だから、左辺も正の場合のみ証明できればよい。そこで両辺を２乗して

$$\begin{aligned} &\left(A_xB_x\right)^2 + \left(A_yB_y\right)^2 + \left(A_zB_z\right)^2 + 2A_xB_xA_yB_y + 2A_yB_yA_zB_z + 2A_zB_zA_xB_x \\ &\le A_x^2B_x^2 + A_x^2B_y^2 + A_x^2B_z^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2B_y^2 + A_y^2B_z^2 + A_z^2B_x^2 + A_z^2B_y^2 + A_z^2B_z^2 \end{aligned}$$

両辺から同じ項を消去して

$$2A_xB_xA_yB_y + 2A_yB_yA_zB_z + 2A_zB_zA_xB_x \le A_x^2B_y^2 + A_x^2B_z^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2B_z^2 + A_z^2B_x^2 + A_z^2B_y^2$$

左辺を移項すると

$$\begin{aligned} 0 &\le \left(A_x^2B_y^2 - 2A_xB_xA_yB_y + A_y^2B_x^2\right) + \left(A_y^2B_z^2 - 2A_yB_y + A_z^2B_y^2\right) + \left(A_x^2B_z^2 - 2A_zB_zA_xB_x + A_z^2B_x^2\right) \\ &= \left(A_xB_y - A_yB_x\right)^2 + \left(A_yB_z + A_zB_y\right)^2 + \left(A_xB_z - A_zB_x\right)^2 \end{aligned}$$

となり自明。

10. 内積の性質(3.19)を，ベクトル$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (λ **は任意定数**)を導入し，$\mathbf{C}^2 \ge 0$を使って証明せよ.

$\left|\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}\right| \le AB$を証明したい.

$\mathbf{C}^2$という２乗の記号は「同じベクトルどうしの内積」表す特別な書き方である

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = |\mathbf{C}|^2 = C^2$$

(最右辺のC^2のCは，ベクトル$\mathbf{C}$の大きさ，すなわち$C = |\mathbf{C}|$.

本問の題意は，$\mathbf{C}$と$\mathbf{C}$の内積をとると，それは$\mathbf{C}$の絶対値の２乗となるから，負にはならないことを用いることである.

実際に計算をする.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda\mathbf{A} \cdot \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \lambda\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= \lambda^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

上式を$\mathbf{C}^2$という記号を使って

$$\mathbf{C}^2 = (\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda^2\mathbf{A}^2 + 2\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 = |\mathbf{C}|^2 \ \ge \mathbf{0}$$

と書いた.λの各次数の係数として現れる$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$，$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$という内積は実数だから

$$\lambda^2\mathbf{A}^2 + 2\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \ \ge \mathbf{0}$$

は“ふつうの”λの２次方程式であり，任意のλに対してこの不等式が成り立つには，判別式が負となる必要がある．すなわち

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{2}}-(\mathbf{A}^{\mathbf{2}})(\mathbf{B}^{\mathbf{2}})\le\mathbf{0}$$

あるいは

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{2}}=|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^{\mathbf{2}}\le(\mathbf{A}^{\mathbf{2}})(\mathbf{B}^{\mathbf{2}})=|\mathbf{A}|^{\mathbf{2}}|\mathbf{B}|^{\mathbf{2}}=A^2B^2=(AB)^2$$

最左辺は$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$という実数の２乗だから，その実数の絶対値の２乗に等しいことを使っている．また，すべて正の量だから，不等号の両側の平方根をとっても，不等号の向きはかわらない．よって

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|\le AB$$