４章

> 1. 水平な台上で長さ 50cm の糸に結ばれた質量 50g の球が糸に引かれて 1.0s に 2.0 回の割合で円運動している。ある瞬間に糸が切れた。そののち球はどのような運動をするか、そのときの加速度と速度はいくらか。

糸に結ばれている間、球は糸から水平な面内を向く力を受けているが、糸が切れるとその力はゼロになる（鉛直方向は重力があるが、球が落ちていかないように台が支えているので、ここでは考えなくてよい。また台は摩擦力を球に与えるが、これは小さいとして無視する。さまざまな力については６章で学ぶ）。切れた瞬間より後では、水平面内での運動はその方向の力がゼロだから慣性の法則（外から何らの作用もはたらかなければ、運動している物体は等速度直線運動をする）にしたがう。この等速度直線運動は「切れた瞬間における速度」が保たれるので、速度の向きは切れた時点での位置における円の接線方向、速度の大きさは切れた瞬間（直前）の速さすなわち

速度の大きさ＝半径×回転の角速度

$$=\left(5.0\times10^{-1}\,\mathrm{m}\right)\times\left(2\pi\times2.0\,\mathrm{rad/s}\right)=\pi\times2.0\,\mathrm{m/s}=6.3\,\mathrm{m/s}$$

となる。切れた瞬間以降、加速度は 0。

> 2. 同じ物体を月面で月が引く力は地上で地球が引く力の$\frac{1}{6.0}$とする。質量 50 kg の物体について、月面上で
> １）落下の加速度はいくらか。
> ２）水平面内で力 10N を加えたとき物体の得る加速度はいくらか。

１）重力について復習すると、地球上で地球が質量ｍの物体を引く力が F = mg であり、この物体の鉛直方向の運動方程式が

$$ma = F = mg$$

となることから、加速度 a が g と等しくなった。月面で月が質量ｍの物体を引く力は、題意より mg/6 となるから、落下の加速度は g/6 となる。数値を求めると（「1/6」の 6 が有効数字２桁以上だとして）

$$\text{落下の加速度}=\frac{9.8\,\mathrm{m/s^2}}{6.0}=1.6\,\mathrm{m/s^2}$$

２）水平方向に加えた力Ｆが水平面内で引き起こす運動は、地上であろうと月面であろうと、宇宙空間であろうと、慣性系で記述する限り同じ運動方程式 F = ma に従う。したがって（問題に与えら得た数値がすべて有効２桁とすると）

$$\text{加速度}\ =\frac{10\,\mathrm{N}}{50\,\mathrm{kg}}=0.20\,\mathrm{m/s^2}$$

４章

3.　質量 m の物体が次のような運動をするとき、物体にはたらく力を位置と速度で表せ。R, α, ωは定数である。

（１）　$x = Rte^{-\alpha t}$

速度は位置 x を時間で微分して

$$\frac{dx}{dt} = R\left(\frac{d}{dt}t\right)e^{-\alpha t} + Rt\left(\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}\right) = Re^{-\alpha t} + Rt\left(-\alpha e^{-\alpha t}\right) = R\left(1-at\right)e^{-\alpha t} \quad (◇)$$

加速度は速度 $\dfrac{dx}{dt}$ を時間で微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(R\left(1-\alpha t\right)e^{-\alpha t}\right) = R\left(\frac{d}{dt}\left(1-\alpha t\right)\right)e^{-\alpha t} + R\left(1-\alpha t\right)\left(\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}\right)$$

$$= R\left(-\alpha\right)e^{-\alpha t} + R\left(1-\alpha t\right)\left(-\alpha e^{-\alpha t}\right) = R\left(\alpha^2 t - 2\alpha\right)e^{-\alpha t} \quad (◇◇)$$

さて、題意により加速度を速度と位置で表したい。言い換えると、加速度の式から x と $\dfrac{dx}{dt}$ の式を使って $Re^{-\alpha t}$ と $Rte^{-\alpha t}$ を消去する。具体的には、位置の式

$$Rte^{-\alpha t} = x$$

と、これを

$$\frac{dx}{dt} = R\left(1-at\right)e^{-\alpha t} = Re^{-\alpha t} - \alpha Rte^{-\alpha t}$$

に代入して得る

$$\frac{dx}{dt} = Re^{-\alpha t} - \alpha x \qquad \text{すなわち} \qquad Re^{-\alpha t} = \frac{dx}{dt} + \alpha x$$

を、加速度の式に代入すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R\left(\alpha^2 t - 2\alpha\right)e^{-\alpha t} = \alpha^2 Rte^{-\alpha t} - 2\alpha Re^{-\alpha t}$$

$$= \alpha^2 x - 2\alpha\left(\frac{dx}{dt} + \alpha x\right) = -\alpha^2 x - 2\alpha\frac{dx}{dt} = -\left(\alpha^2 x + 2\alpha\frac{dx}{dt}\right)$$

この物体に働く力Ｆによってこの加速度が生じているのだから、第二法則

$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ により

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\left(\alpha^2 x + 2a\frac{dx}{dt}\right)$$

（２）$x = Re^{-\alpha t}\sin\omega t$

ひとまず、速度と加速度を計算する（必要なら、指数関数と三角関数の微分につい

て 3 章の章末問題の解説を参照）：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(Re^{-\alpha t}\sin\omega t\right)=R\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}\sin\omega t\right)=R\left(\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}\right)\sin\omega t+Re^{-\alpha t}\left(\frac{d}{dt}\sin\omega t\right)$$
$$=R\left(-\alpha e^{-\alpha t}\right)\sin\omega t+Re^{-\alpha t}\left(\omega\cos\omega t\right)=Re^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(Re^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right)\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left(-\alpha Re^{-\alpha t}\sin\omega t\right)+\frac{d}{dt}\left(\omega Re^{-\alpha t}\cos\omega t\right)$$
$$=-\alpha R\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}\sin\omega t\right)+\omega R\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}\cos\omega t\right)$$
$$=-\alpha Re^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right)$$
$$+\omega R\left(\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}\right)\cos\omega t+\omega Re^{-\alpha t}\left(\frac{d}{dt}\cos\omega t\right)$$
$$=-\alpha Re^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right)$$
$$+\omega R\left(-\alpha e^{-\alpha t}\right)\cos\omega t+\omega Re^{-\alpha t}\left(-\omega\sin\omega t\right)$$
$$=Re^{-\alpha t}\left[\left(\alpha^2-\omega^2\right)\sin\omega t-2\alpha\omega\cos\omega t\right]$$

x の式

$$x=Re^{-\alpha t}\sin\omega t$$

と、これを速度 $\dfrac{dx}{dt}$ の式に代入した

$$\frac{dx}{dt}=Re^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right)=-\alpha Re^{-\alpha t}\sin\omega t+\omega Re^{-\alpha t}\cos\omega t$$

より得る

$$\frac{dx}{dt}+\alpha Re^{-\alpha t}\sin\omega t=\frac{dx}{dt}+\alpha x=\omega Re^{-\alpha t}\cos\omega t$$

を用いると、加速度の式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Re^{-\alpha t}\left[\left(\alpha^2-\omega^2\right)\sin\omega t-2\alpha\omega\cos\omega t\right]$$
$$=\left(\alpha^2-\omega^2\right)Re^{-\alpha t}\sin\omega t-2\alpha\,\omega Re^{-\alpha t}\cos\omega t$$
$$=\left(\alpha^2-\omega^2\right)x-2\alpha\left(\frac{dx}{dt}+ax\right)=-\left(\alpha^2+\omega^2\right)x-2\alpha\frac{dx}{dt}$$

となる。この加速度を質量 m の物体にもたらす力は

４章

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\left(\left(\alpha^2 + \omega^2\right)x + 2\alpha\frac{dx}{dt}\right)$$

（３）$\mathbf{r} = (2R\cos\omega t)\mathbf{e}_x + (R\sin\omega t)\mathbf{e}_y$　ベクトルで表された位置であることに注意。この位置ベクトルは問題 3. 4 のものと全く同じ。そのとき求めた加速度は

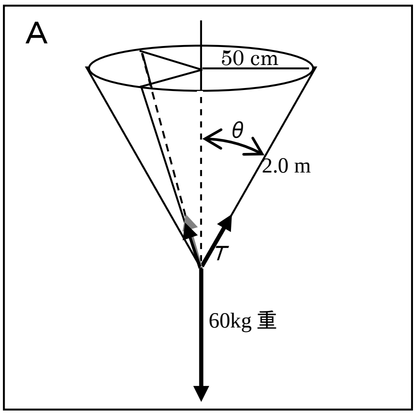
$$\mathbf{a} = -\omega^2\{(2R\cos\omega t)\mathbf{e}_x + (R\sin\omega t)\mathbf{e}_y\} = -\omega^2\mathbf{r}$$

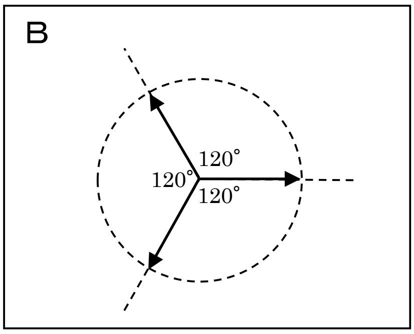
であったから、すでに答えは出ている。この加速度ベクトルを与える力は

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m\omega^2\mathbf{r}$$

となる。

4.　**質量 60 kg の物体を長さ 2.0 m の 3 本のひもで 3 人が 1 本ずつもってつり下げている。3 人は正三角形をなす位置にいて物体との水平距離は 50 cm である。おのおののひもが物体に及ぼす力の大きさは何 N か。重力加速度の大きさを$g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$とする.**





状況を絵に描くと理解が進む（図Ａ）。これは、ほとんどいつでも正しい！

どの人のひもも、物体との位置関係は同じである。より正確に言うと「物体を通る鉛直軸のまわりにこの 3 人を（あるいは観測している者を）120° 回転すると、回転する前と比較して何も差がない。」この状況を「この鉛直軸は３回対称軸、この系は３回対称である」などという。

各ひもが物体に及ぼす力の大きさは、上に述べた対称性よりすべて等しい。その内容を具体的に考えると次のようになる：ひもが及ぼす力はひもの方向に加わるので、これらの力の水平面内の成分（鉛直方向から見た様子）を描くと図Ｂのようになる。それぞれのなす角が 120° であるため、すべての力の水平面内の成分の大きさが等しいときに限り合成したとき 0 になる。つぎに鉛直面内でどのひもも傾きが 50cm/2.0m と同じだから、各力の水平成分が同じなら垂直成分も同じ大きさになる。こうして、水平面内で 3 回対称であることと、鉛直面内で同じ傾きであること、どの力も大きさが同じという結論になった。

そこで、1 本のひもが及ぼす力の大きさを T とし、ひもが鉛直線となす角を θ （図Ａ）

とする。θを頂角とする直角三角形に注目するとサイン＝高さ/斜辺は$\sin\theta = \dfrac{0.50}{2.0} = \dfrac{1}{4}$と

なる。Tの鉛直方向成分は$T\cos\theta = T\sqrt{1-\sin^2\theta} = T\sqrt{1-(1/4)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}T$。物体に働く力

の鉛直方向成分は，３本のひもの張力の鉛直方向成分の和（上向，$3\times\frac{\sqrt{15}}{4}T$），および重力

（下向 60×9.8 N）であり，これらが打ち消しあうことで上下方向に静止しているから

$$3\times\frac{\sqrt{15}}{4}T - (60\times 9.8\mathrm{N}) = 0$$

となる。これより（力の単位は最後の式だけにつけることにして）

$$T = \frac{4}{3\sqrt{15}}\times(60\times 9.8) = \frac{80\times 9.8}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{80\times 9.8}{1.73\times 2.23} = 203 = 2.0\times 10^2\ \mathrm{N}$$

5.　質量 m_1，m_2 の二つの質点１，２の重心は２質点を結ぶ線分を質量の逆比に内分した転であることを示せ。

質点１，２の位置ベクトルを$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$とすると重心の位置ベクトル$\mathbf{R}$は式(4.37)すなわち

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$$

で与えられる。重心と質点１を結ぶ（重心＝$\mathbf{R}$から質点１＝$\mathbf{r}_1$へ，$\mathbf{R}$にそれを加えると$\mathbf{r}_1$になるベクトル）ベクトル$\mathbf{r}_1'$は

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\mathbf{r}_1 - (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \qquad (◎)$$

同様にして重心と質点２を結ぶ（重心＝$\mathbf{R}$から質点２＝$\mathbf{r}_2$へ，$\mathbf{R}$にそれを加えると$\mathbf{r}_2$になるベクトル）ベクトル$\mathbf{r}_2'$は

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\mathbf{r}_2 - (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$= -\frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \qquad (△)$$

となる。

式（◎）の最右辺に現れるベクトル$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$は質点２から１へ向かうベクトルだから，ベクトル$\mathbf{r}_1'$の向きも「質点２から１へ向かい」，式（△）ではベクトル$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$の符号が反転しているので，$\mathbf{r}_2'$の向きは「質点１から２へ向かう」。よって，質点１と２は重心をはさんで１と２を結ぶ直線の反対側にある。つぎに，$\mathbf{r}_1'$の長さr_1（重心から１までの長さ）は「質点１と２を結ぶ線分の$m_2/(m_1+m_2)$倍」，$\mathbf{r}_2'$の長さr_2（重心から２までの長さ）は「質点１と２を結ぶ線分の$m_1/(m_1+m_2)$倍」である。重心からの距離の比は

４章

$$r_1 : r_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} : \frac{m_1}{m_1+m_2} = m_2 : m_1$$

である。すなわち，重心は２質点を結ぶ線分上にあり，この線分を質量の逆比で（順番を逆にとって）内分した点である。

6. 10 g の球 A が速度 5.0 m/s で、静止している質量 20 g の球 B に衝突し、ちょうど反対向きに速さ 1.0 m/s で跳ね返った。
1) B が A に及ぼした力積はいくらか。
2) A が B に及ぼした力積はいくらか。
3) B が得た速度はいくらか。

１）「B が A に及ぼした力積」とは、教科書の定義（式（4. 43））に従って言い換えると「B から A に作用した力が衝突している時間内におよぼした力積」である。この力は衝突している（両球が接触している）間だけ作用するが、どれだけの時間接触し、その間にどのように力が変化したかわからない。そうすると、式(4. 43)すなわち

$\mathbf{I} = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F}(t)dt$ を用いて力積を計算することはできない。しかし、式(4. 45)「力積とその時間内に起きる運動量の変化に等しい」ことを用いるとこの問題は解決する。

そこで球 A が衝突の前後で運動量をどれだけ変えたかに注目する。球の質量は変化しないので、速度の変化を計算すればよい。問題で断ってはいないが、議論を簡単にするために球Ａは直線上を運動すると考えているので、この直線を座標軸にとり、はじめの（すなわち衝突前の時刻 t_A における、添え字の A は教科書本文にあわせたもので、球の名前の A とは無関係です）球 A の速度の向きを正の方向とする。衝突前の球の速度は

$$v(t_A) = 5.0\,\mathrm{m/s}$$

また衝突後の時刻 t_B における速度は

$$v(t_B) = -1.0\,\mathrm{m/s}$$

である。したがって求める力積は、衝突による球 A(質量を m とする)の運動量の変化すなわち

$$I_{AB} = p(t_B) - p(t_A) = mv(t_B) - mv(t_A) = m\{v(t_B) - v(t_A)\}$$
$$= (0.01\mathrm{kg}) \times (-1.0 - 5.0)\mathrm{m/s} = -6.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot m/s}$$

となる。「負」は力積の向きが「はじめの球Ａの速度と逆」であることを示す。

２）ＡがＢに与えた力積は、ＢがＡから受けた力の時間積分である。その力はＢがＡに及ぼした力の反作用であり、作用反作用の法則から大きさが等しく向きが逆である。さらに力が作用した時間（衝突の時間）は両方の力に共通である。したがって内積すな

わち「力を時間で積分したもの」は１）で求めたものと大きさが等しく逆向きである。

$$I_{BA} = -I_{AB} = 6.0\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

３）衝突の後、Ｂは静止状態から速度 v_B に変化したとする。Ｂの運動量変化とＢが受けた力積は同じだから

$$0.020\,\mathrm{kg}\times(v_B - 0) = I_{BA}$$

より

$$v_B = \frac{6.0\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}}{0.020\,\mathrm{kg}} = \frac{6.0\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m/s}}{2.0\times10^{-2}\,\mathrm{kg}} = 3.0\,\mathrm{m/s}$$