Chapt.4
力学の基礎法則

慣性系
運動方程式
作用反作用の法則

§4.1　慣性の法則
[1] 慣性の法則（Newtonの第1法則）

慣性の法則

外から力を受けない物体の運動が，

等速直線運動となる座標系が存在する

この座標系を慣性系という

ガリレイの観測と実験

ニュートンによる一般化，定式化

[2] ガリレイ変換

- ガリレイ変換：慣性系OとO’の間の座標変換で次の性質を満たす
  - 質点の座標(x, y, z)と(x', y', z')の関係：
    - $x' = x + V_x t,\ y' = y + V_y t, \quad z' = z + V_z t$
    - O’の原点が，Oから見て，等速度(V_x, V_y, V_z)で移動する
    - 座標軸は回転しないで平行に移動
  - 確認：力を受けずに運動する物体が等速度を保つ．

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V_x = v + V_x$$

vが一定に保たれるとき，v'も一定に保たれる

  - 特徴：ガリレイ変換で加速度は不変に保たれる

$$a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} + 0 = a$$

同じ物体の加速度の値はOとO’で同じになる．

§4.2 運動方程式･第二法則
[0]ガリレイの相対性原理と法則探究の方針

- 立場：運動の法則はガリレイ変換に対して不変
  - 意味：　ある慣性系で記した「物体の運動を支配する法則」の式は，他の慣性系でも同じ式になる.
  - 実例：　慣性の法則は，ガリレイ変換に対して不変である.
    - どの慣性系から見ても「力を受けない物体が等速度を保つ」
    - 慣性の法則について，どの慣性系も相対的である（等価である）
- 力を受けて運動する物体に関する「運動の法則」
  - ガリレイ変換に対して不変な法則を採用したい
  - それは，加速度についての法則であろう

[1] 運動方程式, Newtonの第2法則

法則 : 慣性系では物体に加わる力と加速度が比例

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} F \rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

$$\boxed{m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$$, m:物体の質量

[1′] 質量と力の単位

- 質量の測定（基準の質量との比較）
  - 原理的には
    - 第３法則：２物体間の力は同じ大きさ
    - $ma = m'a' \rightarrow m' = \frac{a}{a'}m$
    - 加速度はものさしと時計で測れる
  - 実際は
    - 重力の比較，天秤
    - $mg : m'g$
- 質量の単位 1 kg
    - キログラム原器
- 力の単位 1 N (ニュートン)= $1\,\mathrm{kg\,m}/s^2$
    - 1 kg の質量に 1 m/s^{2}の加速度を与える力

[2] 重力

- 用語
  - 地球上の物体に加わる力: $F = mg$
    - 地球による万有引力 + 自転による「遠心力」
    - 地上の物体が自由落下するときの重力加速度g × 質量m
  - 地球などの天体が物体に及ぼす万有引力
    - 宇宙ステーション内の微小重力
    - 天体による重力場，重力レンズ
    - 重力波
- 重力mg=重さmg [N]，質量m [kg]

§ 4.3 力の合成

- 力はベクトルである
  - 力は向きと大きさをもつ: $\vec{F} = m\vec{a}$ （成分ごと, 座標回転）
  - 力を合成するとき平行四辺形の法則 : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$

- 力のつりあい
  - 合力= 0
  - 同じ方向の2力: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \ \rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$
  - 3つの力 : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \qquad \rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

例題 4.1

- 糸が物体に及ぼす力
  - 糸の方向に引く力
  - 糸の長さが変わらないように，力の大きさが変化する

- 力のベクトルを成分に分解し，つりあいの条件を書く
  - 式が簡単になるように，基準の方向（座標軸）を決める
  - 水平との角が与えられている．重力は水平と直角方向

  - 水平方向のつりあい
  - 鉛直方向のつりあい

§4.4 作用･反作用の法則，第3法則
[1]作用･反作用の法則

物体１が物体２に力を及ぼすとき，必ず2は1に力を及ぼす.

- 作用･反作用の法則:
  1が２に及ぼす力（作用）と，2が1に及ぼす力（反作用）は，
    - 同一直線上にあり
    - 大きさが同じで
    - 逆向き
- 必然性
  - 物体１と2を「ひとつの系」とする．系外からの力（外力）がないとき，第3法則がないと系は内力で運動を始めることになる

例題 4.2

- 座標軸
- 機関車の質量 m_0, 推進力（線路から働く）F_0
- 運動方程式，力を大きさで記すとき
  - 機関車: $F_0 - F = m_0 a$
  - １両目: $F - F_{12} = m_1 a$
  - ２両目: $F_{21} = F_{12} = m_2 a$

機関車+1両目:	$F_0 - F_{12} = (m_0 + m_1)a$
1両目+ 2両目:	$F = (m_1 + m_2)a$
全体:	$F_0 = (m_0 + m_1 + m_2)a$

例題4.2

- 力を符号つきで表すとき（ex. 力が正 ⇒ 右向きの力）
  - F_0: 推進力:レールから機関車へ
  - F_{01}:1両目から機関車へ，F_{10}:機関車から1両目へ
  - F_{12}:2両目から1両目へ，　F_{21}:1両目から2両目へ

  - 機関車: $F_0 + F_{01} = m_0 a,\ F_0 > 0$
  - 1両目: $F_{10} + F_{12} = m_1 a$（第3法則:$F_{01} + F_{10} = 0$）
  - ２両目: $F_{21} = m_2 a$（第3法則:$F_{12} + F_{21} = 0$）

機関車+1両目に対する運動方程式	:$F_0 + F_{12} = (m_0 + m_1)a$
1両目+ 2両目	: $F_{10} = (m_1 + m_2)a$
全体	: $F_0 = (m_0 + m_2 + m_2)a$

Q 4-1

[A] 2個の質点m_1, m_2が従う運動方程式を記せ．ただし両者には内力$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$，外力$\vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}, \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}$が作用する.

注：内力(internal force)：系を構成する質点間に作用する力

外力(external force)：系外の物体から及ぼされる力

[B] 作用・反作用の法則を適用し，内力が打ち消しあい見えなくなるように式を変形せよ．最終式は，次のMおよび$\vec{R}$を用いて表せ.

$$M = m_1 + m_2, \qquad \vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

A 4-1

[A] $m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}, \quad m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}$

[B] $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \; m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}$

$$M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})},$$

$$M = m_1 + m_2, \qquad \vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

$\vec{R}$に全質量Mと外力の和が集中した」ときの１質点の運動方程式

[2] 重心（質量中心）

- 質点系
  - 質点の集まり，機能や相互作用で他と区別される
  - 内力（作用・反作用）と外力

- 2質点系の重心

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad M = m_1 + m_2$$

- 重心の運動方程式

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}$$

外力の総和が0のとき，重心は等速度で運動

重心の加速度　＝　外力の総和÷全質量

Q 4-2

- ２質点系の外力が重力のとき，重心はどのように運動するか

A 4.2

- $M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = M\vec{g}$
  重心に全重力が加わったときと同じ運動をする

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right)$$
$$= \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}\right)$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{21} + m_2\vec{g}$$
$$= m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = M\vec{g}$$

§ 4.5 運動量と力積

運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$

運動の勢い

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \because \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2質点**系の運動量** $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})} = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_2^{(ex)}$$

$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = M\dfrac{d\vec{R}}{dt}$：　$\vec{P}$ は系全体の運動の勢いを表す

Q 4.3

[A] 質量 1 kg の質点が速さ 2 m/sで真北に進むとき，運動量は？

[B] 同じ質点の運動を 速さ 3 m/s で真北に進む車からみたとき，運動量は？

[C] 箱の中に質量1 kgの球が2個入っている．両球ともに左に進み，それぞれ速さが1 m/sと2 m/sのとき，箱の中の全運動量は？

[D] 箱の中の全運動量が0となるのはどのようなときか？

A 4.3

[A] 2 kg m/s，真北．　(注意：運動量の単位，向き)

[B] -1 kg m/s, 真北．または 1 kg m/s 真南．(座標変換)

[C] 3 kg m/s，左

[D]運動量のベクトル和が0．（すべての球が速度0. あるいは互いに逆向きに運動）

力積＝運動量変化

運動方程式 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ を時間で積分：

$$\text{力積：}\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\,dt = \left(\int_{t_A}^{t_B} F_x\,dt\,, \int_{t_A}^{t_B} F_y\,dt\,, \int_{t_A}^{t_B} F_z\,dt\right)$$

運動量の変化：$\displaystyle\int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \vec{p}(t_B) - \vec{p}(t_A)$

運動量の変化は，力そのものではなく，力積による

[撃力]

- 非常に短い時間だけ持続する，非常に大きな力
  - 力積が有限の値となる → 運動量ベクトルが変化

- 運動の取り扱いを簡単化する
  - 非常に短い時間の間に起きる運動量変化
  - 通常の大きさの力は力積を無視できる → 力を無視
  - 物体の速度は有限なので，位置の変化は無視できる

例題 4.3

- $t \to t + \Delta t$ の間の運動量の変化

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$$

力が一定のとき: $\vec{F}(t) = \vec{F}$

$$\int_t^{t+\Delta t} \vec{F}(t)\,dt = \vec{F}\int_t^{\Delta t} dt = \vec{F}\cdot\Delta t$$

力積の単位＝運動量の単位

Q 4.4

むき出しの拳骨と，グローブをはめたのとでは，同じパンチでも相手のダメージが異なる．力積を用いて状況を説明せよ．

弾丸が装甲板で跳ね返されるときと，めり込んで止まるときとでは，（同じ時間で弾丸の運動量が変わるとして）どちらが大きな力を装甲板に与えるか．

A 4.4

ダメージは力の大きさに依存する．相手が受ける力と，手が受ける力は同じ大きさ（第3法則）．手は，同じ速度から静止するが，その間の時間はグローブの中にあるほうが長い．同じ運動量変化すなわち力積に対して所要時間が長ければ，力は小さい．

弾丸が跳ね返されるときの運動量変化は，めり込んで止まるときの運動量変化より大きい．したがって，前者のほうが力が大きい

[単位と次元]

基本単位:　kg, m, s

組立単位:　N, J, W, …

単位の接頭語: kg, (g), mg, μg, ng,…,

km, (m), cm, mm, μm, nm,…

次元:量の種類，比較可能な量は同じ次元をもつ

$[L]^{\alpha}[M]^{\beta}[T]^{\gamma}$

無次元量:同じ種類の量の比

マッハ数，角度，…

例題 4.4

- 次元解析
- 振り子の周期を観測すると，糸の長さによって変化することが分かった．周期は振り子運動の速さに依存し，加速度に依存するであろうから，重力加速度gに依存するだろう．（実験によれば重りの質量には無関係だが，ここでは勉強のために，質量にも依存するかもしれないとしておこう）．依存性はべき乗とする．