

5 運動方程式を解く

A. 以下の用語を説明せよ(教科書の記載事項を要約する。または辞書などで調べる)。できるだけ言葉で書くこと。

1) **未定定数**：。方程式を解くなどで得られた解(数式)に含まれる定数だが、定数であることだけ分かっていて値がまだ決まっていないもの。たとえば、ある関数の不定積分は、未定定数である積分定数が含まれ、定数の分だけ異なる無数にある原始関数を一括して表している。

2) **初期条件**：微分方程式の一般解に含まれる未定定数を決める条件として与えられた、ある時刻(普通は時間の原点)での解の値や、解の時間微分の値。独立変数が「時間」という意味を持たないとき(たとえば空間的な位置の場合には境界条件という)。

3) **軌道の方程式**：。2～3次元での質点の運動で、質点が通過する位置をつなげたものを軌道といい、その形を表す方程式を軌道の方程式という。運動方程式から位置ベクトルの各成分を時間 t の関数として求めたら、パラメータ t を消去して得る。(二次元では $x(t), y(t)$ から得る $y=f(x)$ が軌道の方程式)。

4) **物体の速度と空気抵抗の関係**：空気中で運動する物体に空気から加わる力のうち、物体の速度(空気に対する速度)と逆向きに作用する力を空気抵抗という。空気抵抗の大きさは、速度 v が小さければ v に比例し、 v が大きければ v の二乗に比例する。詳細は空気の密度、物体の形状や大きさで異なる。

5) **終速度**：速度とともに増大する抵抗力を受けながら運動する物体が重力で落下するときの最終的な落下速度。重力と抵抗力が釣り合う結果としての等速度運動の速さであり、物体の質量、重力加速度、抵抗力の性質(物体の形状や抵抗力の速度依存性の詳細)により値が異なる。

B. 外部から力を受ける質点の運動について調べる手順を述べよ。

① **物体に加わる力をすべて書き出す**：

質点に接触している物体(机や床からの垂直抗力と摩擦力、糸からの張力、空気や水から受ける浮力や抵抗力など)から受ける力と、重力、万有引力、電荷をもつ質点なら電磁気的な力などのように、接触しない物体から受ける力に分類すると考え落としが少ない。

② **状況を簡略化(モデル化、理想化)する**：

書き出した力のうち、注目する運動に支配的な力だけを探り上げる(ここが難しい)。どの力を無視するかは、力の大小、作用する時間、注目する運動の持続する時間、軌道の広がりなどで異なる。

③ **座標系を選ぶ**：

次の項で立てる運動方程式とセットの作業であり、運動方程式を最も単純(分りやすく解きやすい)形で書く座標系を選ぶ。普通は慣性系を選ぶが、その理由は後に学ぶ「みかけの力」を考えなくてよいからである。しかし、たとえば地球を回る軌道にある宇宙船内での運動を表すには、宇宙船に固定した座標系(円運動という加速度運動なので慣性系ではない)を選ぶのがよいだろう(宇宙船内で運動を観測するから、さらに、見かけの力「遠心力」と重力がつりあうので、あたかも「無重力」に見えるから)。

④ **運動方程式を書く**：

慣れるまでは、力の成分が0になる座標についても式を書いておくほうがよいだろう。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

の右辺を具体的に記す。

⑤ **運動方程式の一般解を求める**：

5 運動方程式を解く

微分方程式を解くという作業。微分方程式は導関数の性質を示す式だから、結局この作業は導関数からもとの関数を求める「不定積分」という作業である。不定積分の結果、値が決まっていない積分定数を含む一般解が求まる。

⑥ 初期条件から未定定数を決める：

運動を開始したとき ($t=0$) にどこに居たか (初期位置)、どんな速度だったか (初速度) が決まっていると、力の加わり方が同じならその後の運動は完全に同じになってしまう。これは、数学的には初期条件から運動方程式の解の未定定数を決定する作業と対応する。

⑦ 求まった解から必要な情報を引き出す：

運動方程式の解には、質点の運動に関する全ての情報が含まれる。何を知りたいかを数学の言葉で言い直し、それを解から導き出す。