７章

1. 時速 72 km/h で走っていた質量 1.0 トン(1000 kg)の自動車がブレーキを踏み 50 m 進んで停止した。

1) ブレーキを踏む直前の自動車の運動エネルギーはいくらか

2) この間減速の加速度が一定とすると、路面からはたらいた摩擦力はいくらか。

3) 停止までの時間はいくらか。

1)　自動車の進行方向を x 座標の正の方向とする。ブレーキを踏む直前の自動車の速度（初速度）は正でありその大きさ（初速）v_0 を MKS 単位系で表すと

$$\text{初速} = v_0 = \frac{72\times10^3\,\mathrm{m}}{60\times60\,\mathrm{s}} = 2.0\times10\,\mathrm{m/s}$$

である。質量を M と書くと、運動エネルギー T は

運動エネルギー

$$= T = \frac{1}{2}Mv_0{}^2 = \frac{1}{2}\times\left(1.0\times10^3\,\mathrm{kg}\right)\times\left(2.0\times10\,\mathrm{m/s}\right)^2 = 2.0\times10^5\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 2.0\times10^5\,\mathrm{J}$$

となる。

2) 自動車は路面からの摩擦力だけの作用で減速した。広義のエネルギー保存則すなわち

自動車の運動量の変化＝摩擦力が自動車にした仕事

を用いて摩擦力を計算する。まず運動量は、初速＝$2.0\times10^5\,\mathrm{J}$、最終速度＝0 だから

$$\frac{1}{2}M\times0-\frac{1}{2}Mv_0^2 = -\frac{1}{2}Mv_0^2 = -2.0\times10^5\,\mathrm{J}$$

と変化する（負は、運動エネルギーが減少したことを示す）。つぎに摩擦力 F のした仕事 W は、この力が一定という条件(および摩擦力の方向が自動車の移動方向と正反対ということも暗黙の前提)があるので、移動距離を L とすると式(7.1)の定義から

$$W = F\times L$$

である。したがって

$$\text{摩擦力} = \frac{W}{L} = \frac{-\frac{1}{2}Mv_0{}^2}{L} = -\frac{2.0\times10^5\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{m}} = -4.0\times10^3\,\mathrm{N}$$

負号は、この力の向きが x 軸の負方向、すなわち自動車が移動する方向と逆であることを表す。

ここで、7.1 節（102 頁から 103 頁、107 頁）にある「仕事の定義」についてまとめておこう（左の矢印の範囲がこの話題）：

- 「力の大きさ（F）と向きがいつも同じ」とき、「力の向きに物体が移動した距離（L）」と力の大きさの積（$F\times L$）を「その力が物体にした仕事（W）」と定義する。すなわち

$$W = F \times L \qquad (*)$$

力の向きと移動の向きが同じ（反対）ならこの仕事は正（負）である。

- この定義ではカバーしきれない状況がある。３次元の世界では力の向きと違う方向に移動することもある（これは８章で扱う）。１次元（直線上の運動で、力の向きもこの直線にそった方向）であっても、物体が受ける力が変化する場合もある。
- 「物体が受ける力が変化する」場合でも、「ある場所に来たとき受ける力は、いつ来ても同じ力」ということもある（107 ページ）。このときは
  - 数学的な言い方では、力は位置の関数 F(x) である。
  - 力が滑らかに変化するとき、非常に短い移動の間は力がほとんど一定とみなし、「一定の力　×　移動距離」という定義をそのまま当てはめる。物体が位置 x で力 $F(x)$ を受け $x+\Delta x$ まで移動したとき（力は $F(x+\Delta x)$ へと変化したが $F(x+\Delta x) \approx F(x)$ としてしまう）、力がした非常に小さな仕事を

    $$\Delta W = F(x) \times \Delta x$$

    とする。これは本当は正しくないのだが、Δx を小さくするほど正しいものと差が小さくなり、「よい近似」となってくる。
  - 移動区間 $[x_A, x_B]$ を N 個の微小区間に分けて（$x_A = x_0, x_B = x_N$）、各微小区間では $\Delta W = F(x) \times \Delta x$ の式を使って仕事を計算する。全区間を移動する間に力がした仕事は

    $$W(x_B, x_A) \approx F(x_0)\Delta x + F(x_1)\Delta x + \cdots + F(x_N)\Delta x = \sum_{k=0}^{N} F(x_k)\Delta x$$

    これは近似である（「≈」と書いた）が、微小区間の幅を無限に小さくしていくと、正しい値に近づくので

    $$W(x_B, x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{N} F(x_k)\Delta x = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx \qquad (**)$$

    である。二番目の等号は、中辺が右辺の定義（定積分の定義）となっているためのもの。
  - （＊＊）の仕事の定義は、力が一定の場合の定義（＊）を含んでいる。すなわち移動距離Ｌが微小な移動距離 Δx をよせあつめたもの

    $$L = N \times \Delta x = \sum_{k=1}^{N} \Delta x = \int_{x_A}^{x_B} dx$$

    だから、$F(x) = F$ ＝一定のときは

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = \int_{x_A}^{x_B} F \times dx = F \times \int_{x_A}^{x_B} dx = F \times L$$

となる。

- このように、もとの特殊な場合の定義を含むようにして、より一般的な場合に適合するように定義のしかたを変える。

- つぎに、力が時間的に変化するとき（103 頁）に適用できる仕事の定義を考える。
  - 時間区間$[t_A, t_B]$に物体が時間的に変化する力$F(t)$のもとで移動するが、力の時間的な変動は滑らかだとする。また物体は時刻tに位置$x(t)$にいるとする。
  - 時間区間をN等分して微小な時間区間$[t, t+\Delta t]$に注目する。この間に力はほとんど変化しないと考えてよい。この微小時間内に物体は$[x(t), x(t)+\Delta x]$という微小区間を移動する。この微小な時間区間内に力がした仕事は

$$\Delta W = F(t) \times \Delta x$$

である。この量を微小時間Δtを用いて表すと

$$\Delta W = F(t) \times \Delta x = F(t) \times \Delta x \times \frac{\Delta t}{\Delta t} = F(t) \times \frac{\Delta x}{\Delta t} \times \Delta t$$

  - 最右辺の第二項$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$は注目する微小な時間区間内の「物体の平均速度」であり、時間Δtが小さいほどその時刻tでの瞬間速度$v(t)$に近い値となる。
  - $[t_A, t_B]$の間に力がした仕事は、近似的に

$$W(t_B, t_A) \approx F(t_0)v(t_0)\Delta t + F(t_1)v(t_1)\Delta t + \cdots + F(t_N)v(t_N)\Delta t = \sum_{k=0}^{N} F(t_k)v(t_k)\Delta t$$

であり、N分割のNを無限に大きくすると（微小区間の幅Δtを０に近づける極限）、正確な値に近づく。すなわち

$$W(t_B, t_A) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{N} F(t_k)v(t_k)\Delta t = \int_{t_A}^{t_B} F(t)v(t)dt = \int_{t_A}^{t_B} F(t)\frac{dx}{dt}dt \qquad (***)$$

となる。最右辺は速度について$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$という置き換えをしたもの。

  - この定義が、（*）を含むことを確認しよう。$F(t) = F =$一定とおき

$$\int_{t_A}^{t_B} F(t)v(t)dt = F \times \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt = F \times \int_{t_A}^{t_B} \frac{dx}{dt}dt$$

となる。中辺と右辺の積分は、定積分の定義にもどれば分るように

$$\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dx}{dt}dt$$
$$= \lim\sum_{k=0}^{N} v(t_k)\Delta t = \lim\sum_{k=0}^{N}\frac{dx}{dt}\Delta t = \lim\sum_{k=0}^{N}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t = \lim\sum_{k=0}^{N}\Delta x = \lim(N\Delta x)$$
$$= x_B - x_A = L$$

よって

$$\int_{t_A}^{t_B} F(t)v(t)dt = F\times\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt = F\times\int_{t_A}^{t_B}\frac{dx}{dt}dt = F\times L$$

- また（***）が（**）を含むことも確認できる。（**）では、位置xを決めると力$F(x)$が決まるのだが、物体は時間の経過とともに$x(t)$のように移動するので力も時間とともに変化すると考えてもよい。$F(x)$に現れる変数xを$x(t)$にしたがってtで表すと、時間の関数ができる：$F(x)=F(x(t))=G(t)$。
- 最右辺を$F(t)$と書きたいところだが、FとGとは関数の形が異なる。（仮に$F(x)=kx$としよう。$F(t)$は、この関数の変数をtとせよというのだから$F(t)=kt$。一方、たとえば$x(t)=ct$のように運動しているとすると、$F(x(t))=k\times(ct)=kct$となり$G(t)=kct$である。）
- そこで、時間の関数として表した力をここでは$G(t)=F(x(t))$と書く。（***）で表した仕事を定積分の定義にもどって書き直すと

$$\int_{t_A}^{t_B} G(t)v(t)dt =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} G(t)\frac{dx}{dt}dt = \lim\sum_{k=0}^{N} G(t_k)v(t_k)\Delta t = \lim\sum_{k=0}^{N} G(t_k)\frac{dx}{dt}\Delta t = \lim\sum_{k=0}^{N} G(t_k)\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t$$
$$= \lim\sum_{k=0}^{N} F(x(t_k))\Delta x = \lim\sum_{k=0}^{N} F(x_k)\Delta x = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx$$

となる。

この問題の場合には、仕事の一般的な定義式（7.5）あるいは(***)を使う必要はない。しかし、簡単な定義式(7.1)あるいは(*)を使うことのできる条件を理解していること、およびその条件が成立しないときにも利用できる一般的な定義を知り、そこから「より単純な場合」の式が誘導できることが大切である。その意味で、式（7.5）を出発点としてこの問に答えよう。路面からの摩擦力が時間によらず一定すなわち$F(t)=F$、ブレーキを踏み始めた時刻をt_A、静止した時刻をt_Bとすると、摩擦力がした仕事は

７章

$$W(t_B,t_A)=\int_{t_A}^{t_B}F(t)v(t)dt=F\int_{t_A}^{t_B}v(t)dt=F\int_{t_A}^{t_B}\frac{dx}{dt}dt$$

最右辺の積分は（積分法を勉強したひとは「置換積分法により」と言ってよい）

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{dx}{dt}dt=\int_{x_A}^{x_B}dx=x_B-x_A=L$$

となるので

$$W(t_B,t_A)=F\times L$$

である。

３）自動車は一定の力Fによる等加速度運動をする。すなわち、速度の時間的変化の割合が一定である。加速度 $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{-4.0\times10^3\,\mathrm{N}}{1.0\times10^3\,\mathrm{kg}}=-4.0\,\mathrm{m/s^2}$。初速度 $v_0=-2.0\times10\,\mathrm{m/s}$ が一定の割合 a で減少し静止（速度０）になるまでの時間は

$$\frac{v_0}{a}=\frac{-2.0\times10\,\mathrm{m/s}}{-4.0\,\mathrm{m/s^2}}=5.0\,\mathrm{s}$$

２. 質量 100 g の物体を高さ 10 m のところから初速 0 で落下させた。
1） 空気の抵抗を考えないとき、地面に衝突するときの速さはいくらか。
2） 実際は空気の抵抗のため衝突時の速さは 10 m/s であった。抵抗力のした仕事はいくらか。

１） 物体に作用する力が重力だけであると考える。重力は物体の位置だけでの関数であり、物体の位置エネルギーを定義でき力学的エネルギー保存則が成り立つ。地面を原点とし鉛直上向きに座標をとると、x における質量 m の物体の位置エネルギー $V(x)$は、重力加速度を g として

$$V(x)=mgx$$

この位置における物体の速度を$v(x)$とすると、運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv(x)^2$だから、

力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv(x)^2+V(x)=\frac{1}{2}mv_0{}^2+V(h)=0+mgh=mgh$$

ただし、初期位置$x=h$において初速度$v_0=0$の力学的エネルギーを第二辺以降に書いた。終状態で位置は$x=0$だから$V(0)=mg\times0=0$、またそのときの速度を$v(0)=-v$と書くと（負は下向きの速度を表す、v は速度の大きさである）

７章

$$\frac{1}{2}m(-v)^2+0=\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

衝突の速度の大きさは

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\times(1.0\times 10\,\mathrm{m/s})}=1.4\times 10\,\mathrm{m/s}$$

ルートの中の「２」は表記こそ１桁だが、どこまでも正確な「２」、他の数値が有効２桁（と思われる）、よって答えも有効２桁。

２）　空気の抵抗は位置エネルギーを考えることのできない力である。なぜなら、物体の位置により決まるのではなく、物体の速度によって大きさも向きも変化するから。したがって、空気抵抗を受ける運動では力学的エネルギー保存則（運動エネルギーと位置エネルギーの和が変化しない）が成り立たない。しかし広義のエネルギー保存則（力がした仕事と運動エネルギーの変化が等しい）は常に成り立つ。

落下が始まると物体は速度$v(t)$が時間的に変化するので空気抵抗$F(t)$も時間的に変化する。重力は常に一定である「$-mg$」。物体に作用する力は両者の和「$F(t)-mg$」が落下開始(時刻 0)から地面に到達する間(時刻 T)に物体にする仕事は

$$\begin{aligned}W&=\int_0^T (F(t)-mg)v(t)dt=\int_0^T F(t)v(t)dt-\int_0^T mgv(t)dt\\&=\int_0^T F(t)v(t)dt-\int_h^0 mgdx=\int_0^T F(t)v(t)dt-mg\int_h^0 dx\\&=\int_0^T F(t)v(t)dt+mgh\end{aligned}$$

である。最右辺第一項が空気抵抗のした仕事である。Wが運動エネルギーの変化と一致するのだから、衝突のときの速度を（小問１）と区別するために）v'と書くと

$$\frac{1}{2}mv'^2-0=\frac{1}{2}mv'^2=W=\int_0^T F(t)v(t)dt+mgh$$

これが広義のエネルギー保存則から導かれる関係である。書き換えると

$$\int_0^T F(t)v(t)dt=\frac{1}{2}mv'^2-mgh \qquad (*)$$

右辺のmghは、物体の落下開始時の位置エネルギーでありそのときの運動エネルギーは０だから、落下開始時の力学的エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギーの和）に等しい。また、$\frac{1}{2}mv'^2$は、衝突時の運動エネルギーでありそのときの位

置エネルギーは０だから、衝突時の力学的エネルギーに等しい。すなわち（＊）の右辺は、物体の力学的エネルギーの変化を表す。小問１）のように空気抵抗が無視できるときの衝突時の速さをvとすると、空気抵抗で速度の増加が鈍ったことから

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh > \frac{1}{2}mv'^2$$

であり、（＊）の右辺（したがって抵抗力のした仕事）は負となる。このことを含めて言い直すと、力学的エネルギーの減少分が抵抗力のした仕事である。

教科書の解答は仕事の大きさをWと書いているが、ここでは仕事の符号もふくめてWと書くことにする。また、与えられた数値はすべて有効２桁だと考えて

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv'^2 - mgh = \tfrac{1}{2}\times(0.10\,\mathrm{kg})\times(1.0\times10\,\mathrm{m/s})^2 - (0.10\,\mathrm{kg})\times(9.8\,\mathrm{m/s^2})\times(1.0\times10\,\mathrm{m}) \\ &= (0.10\,\mathrm{kg})\times\{\tfrac{1}{2}\times(1.0\times10\,\mathrm{m/s})^2 - (9.8\,\mathrm{m/s^2})\times(1.0\times10\,\mathrm{m})\} \\ &= (0.10\,\mathrm{kg})\times(-4.8\times1.0\times10\,\mathrm{m^2/s^2}) = -4.8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

3.　質量 200 g の物体が水平な床の上を速度 10 cm/s で滑って、一端を固定したバネに衝突した。バネは 5.0 cm 縮んだのち反発して伸びた。もっとも縮んだときのバネの位置エネルギーはいくらか。また、このバネのバネ定数 k はいくらか。バネの質量、床からの摩擦力は無視する。

問題文には記していないが、バネは衝突前に自然長でありこのときのバネの力による位置エネルギーを０とするのが自然な設定である。物体の質量$m = 2.0\times10^{-1}\,\mathrm{kg}$, 初速$v = 1.0\times10^{-1}\,\mathrm{m/s}$、バネの変形量$d = 5.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$とする。

床面上の物体の運動は、バネと接触している間はバネの復元力（の反作用）だけ、その他の時間は力が作用しないと考えるので、物体の力学的エネルギーは保存する。

まず、物体がバネと切り離されて自由に運動しているとき、物体には力が作用しないので位置エネルギーは０だから、その運動エネルギーが力学的エネルギーに等しい。

つぎに、バネがもっとも縮んだときは、物体の運動の向きが反転するとき（速度の符号が正から負へ、あるいは負から正へと変わるとき）なので、速度が０になるときでもある。言い換えると、バネがもっとも縮んだときは、物体の力学的エネルギーはバネから受ける力の位置エネルギーだけとなる。（教科書の「バネの位置エネルギー」は、位置エネルギーを蓄えている実体がバネであることを明示する言い方。）

力学的エネルギー保存則から、バネがもっとも縮んだときは、衝突前の物体の運動エネルギー$\tfrac{1}{2}mv^2$がすべてバネからの力による位置エネルギー$\tfrac{1}{2}kd^2$に変わった。したがって、位置エネルギーは（運動エネルギーを計算して）

$$\frac{1}{2}\times(2.0\times10^{-1}\,\mathrm{kg})\times(1.0\times10^{-1}\,\mathrm{m/s})^2 = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$

７章

バネ定数は$\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}kd^2$より

$$k=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}d^2}=\frac{mv^2}{d^2}=\frac{\left(2.0\times10^{-1}\,\mathrm{kg}\right)\left(1.0\times10^{-1}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{\left(5.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}=8.0\times10^{-1}\,\mathrm{N/m}$$

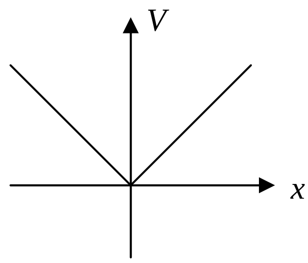
となる。

4. 位置エネルギーがつぎのように与えられている。各点での力をもとめよ。$k,a>0$とする

1）$V(x)=k|x|$

2）$V(x)=k\left(x^4-2a^2x^2\right)$

1） 絶対値記号を用いないで表すと、

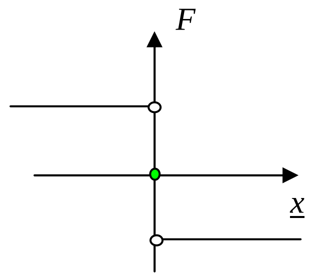


$$V(x)=\begin{cases}kx & \cdots x>0\\ 0 & \cdots x=0\\ -kx & \cdots x<0\end{cases}$$

となる。位置エネルギーから力を求める式(7.59)すなわち

$$F(x)=-\frac{dV}{dx}$$

を用いると



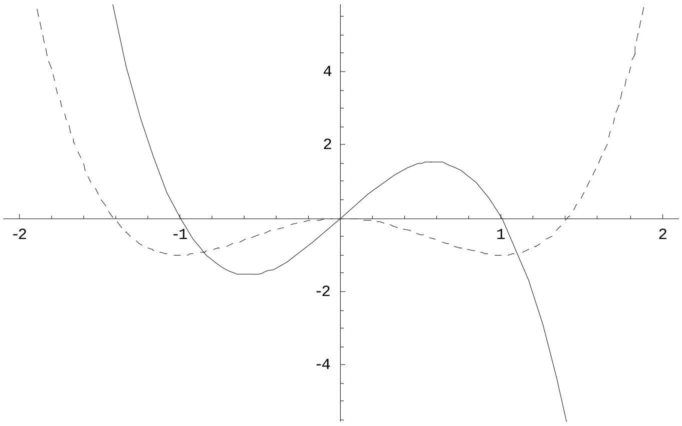
$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{d}{dx}(kx)=-k & \cdots x>0\\ \text{不定} & \cdots x=0\\ -\dfrac{d}{dx}(-kx)=k & \cdots x<0\end{cases}$$

となる。$x>0$（<0）の場所で力は負（正）だから、原点を除く全域で原点に向かう力である。力の大きさはkであり一定。

原点でうける力は、与えられた位置エネルギーから求めることはできない。数学的には$V(x)$が原点で微分できないことに対応する。原点を通過すると力が不連続に変化する。原点の両側における力の平均値（すなわち 0）を原点における力と仮定するのが自然だろう。現実世界の位置エネルギーは滑らかに変化するだろうから、この問の関数は「モデル」にすぎない。

７章

２）
$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(k\left(x^4 - 2a^2x^2\right)\right) = -k\frac{d}{dx}x^4 + k\frac{d}{dx}\left(2a^2x^2\right) = -4kx^3 + 2ka^2 \times 2x$$
$$= 4k\left(a^2x - x^3\right)$$



上図は，位置エネルギー（点線）と，それによる力（実線）を重ねて描いたもの．位置エネルギーの極値で力が０になることを確認せよ．位置エネルギーの傾き（の大きさと符号）と力の大きさと向きの関係を確認せよ．$x > 0$の範囲では$x = a$に向かう力が作用し，$x < 0$の範囲では，$x = -a$に向かう力が作用する．

５．　前問において力学的エネルギーが E であるとき，運動可能領域を求めよ。

「運動できるところでは運動エネルギーが負ではない」というのが基本．

１）　運動可能領域で$\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$．また題意より$V(x) = |kx| \geq 0$．よって

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \geq 0$$

とならないかぎり運動は不可能．言い換えると，$E < 0$では運動可能領域はない．

運動可能領域は，$\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$すなわち

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V(x) \geq 0 \quad \text{書きなおすと} \qquad E \geq |kx|$$

を満たすxの範囲である（くりかえしになるが，これが実現するのは$E \geq 0$に限る）．よって

$$\frac{E}{k} \geq |x| \qquad \text{同じことだが} \qquad -\frac{E}{k} \leq x \leq \frac{E}{k}$$

が解．なお，$E = 0$が実現するのは$x = 0$において$v = 0$すなわち静止している場合に限るが，これも「運動状態」のひとつ．

２）　力学的エネルギーば

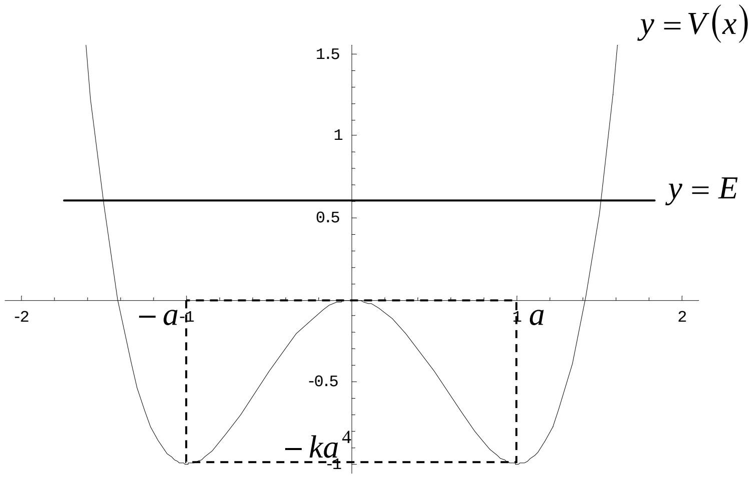
７章

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V(x)=\frac{1}{2}mv^2+k\left(x^4-2a^2x^2\right)$$

よって

$$\frac{1}{2}mv^2=E-k\left(x^4-2a^2x^2\right)\geq 0$$

という不等式が運動可能領域を求める条件．それを詳細に言うと，①下図の位置エネルギーのグラフ $y=V(x)$ と水平線 $y=E$ が交わる必要がある．そのとき②水平線 $y=E$ が $y=V(x)$ の上側に来るxの範囲を求める．



$y=V(x)$ の極値（$\frac{d}{dx}V=-F=0$ を満たす点）は $x=\pm a$，$x=0$ の三点であり，$V(\pm a)=k\left(a^4-2a^2\times a^2\right)=-ka^4$ が極小かつ最小，$V(0)=0$ が極大．

以上を念頭にグラフを観察すると

$E>0$：両グラフの交点は２個，２つの交点を両端とする区間で $E-k\left(x^4-2a^2x^2\right)\geq 0$ が成り立つ．交点は x^2 の２次方程式式

$$\left(x^2\right)^2-2a^2\left(x^2\right)-\frac{E}{k}=0$$

を形式的に（＝解の公式に代入する形で）解くと

$$\left(x^2\right)=a^2\pm\sqrt{a^4+\frac{E}{k}} \qquad (@)$$

であるが，$0<E$ なので $a^2<\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}$ ．$x^2>0$ だから複合の正だけが意味がある．よって，

$$x^2=a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}} \qquad \text{よって} \qquad x=\pm\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}$$

すなわち，運動可能領域は閉区間$\left[-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\dfrac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\dfrac{E}{k}}}\right]$である.

$0 \ge E \ge -ka^4$：等号のときを除いて両グラフの交点は４個. $x<0$の側の２交点を両端とする区間, および$x>0$の側の２交点とする区間が, それぞれ運動可能領域となる, このＥの範囲では（@）の右辺は複合のいずれについても正である. ４交点を小さいものから順番にならべると

$$-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ -\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}$$

であり，運動可能領域は

$$\left[-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ -\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}\right]$$

および

$$\left[\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}\right]$$

の２つの閉区間である.