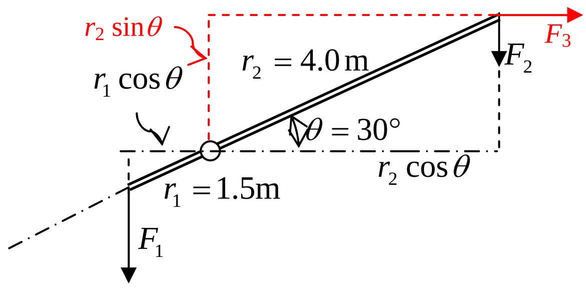
９章

1. てこの支点から 1.5 m のところに質量 200 kg の大石がのっている。てこは水平から 30° 傾いている。反対側、支点から 4.0 m のところに力を加えて大石を持ち上げようとする。
１）持ち上げるのに必要最小限のトルクの大きさはいくらか。
２）力を鉛直に加えるとき必要最小限の力の大きさはいくらか。
３）力を水平に加えるとき必要最小限の力の大きさはいくらか。

１）大石から受ける力によるトルク N_1 をちょうど打ち消すトルクが「持ち上げるのに必要最小限のトルク」となる。（巻末解答ではトルクを表す文字が N となっている。力の単位を表す N は「立体」のフォントで、トルクを表す N は「斜体」のフォントと区別して使っている。単位を表す文字はすべて「立体」を使う習慣がある。「斜体」は、その文字に数値や数値＋単位を代入できるものに用いる。）



大石からてこに加わる力 F_1 は鉛直下向きに

$$F_1 = 200\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

である。この力の腕の長は

$$r_1 \cos\theta = 1.5\,\mathrm{m} \times \cos 30° = 1.5\,\mathrm{m} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから、トルクの大きさは

$$N_1 = r_1 \cos\theta \times F_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1.5\,\mathrm{m}\right) \times \left(200\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\right) = 2.54 \times 10^3\,\mathrm{N \cdot m} = 2.5 \times 10^3\,\mathrm{N \cdot m}$$

である。最小限必要なのは、これと同じ大きさで逆向きのトルクである。

２）加える力の大きさを F_2、$r_2 = 4.0\,\mathrm{m}$ とすると、この力の腕の長さは $r_2 \cos\theta$ だから、F_1 によるトルクと F_2 によるトルクが打ち消し合う条件は

$$r_1 \cos\theta \times F_1 = r_2 \cos\theta \times F_2$$

となり

$$F_2 = \frac{r_1 \cos\theta \times F_1}{r_2 \cos\theta} = \frac{r_1}{r_2} F_1 = \frac{1.5\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{m}} \times \left(200\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\right) = 735\,\mathrm{N} = 7.4 \times 10^2\,\mathrm{N}$$

が最小限必要な力の大きさである。

３）水平な力 F_3 の腕の長さは $r_2 \sin\theta$ だから、この力によるトルクで F_1 によるトルクを打ち消す条件は

$$r_1 \cos\theta \times F_1 = r_2 \sin\theta \times F_3$$

よって

９章

$$F_3=\frac{r_1\cos\theta\times F_2}{r_2\times\sin\theta}=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{1}{\tan\theta}\times F_2=\frac{1.5\,\mathrm{m}}{4.0\,\mathrm{m}}\times\sqrt{3}\times200\,\mathrm{kg}\times9.8\,\mathrm{m/s^2}$$
$$=1.27\times10^3\,\mathrm{N}=1.3\times10^3\,\mathrm{N}$$

2.　半径 360 m の円形のバンクをオートバイで時速 200 km で回っている。 １）オートバイの「バンクの中心のまわりの面積速度」はいくらか。 ２）ライダーの質量は 60 kg である。ライダーのもつ「バンクの中心のまわりの角運動量」はいくらか。

題意より、バイク（おなじことだがライダー）が描く円軌道の半径は $r=3.6\times10^2\,\mathrm{m}$、その速度 $\mathbf{v}$ は、円軌道の接線方向を向き（したがって中心からバイクまでの位置ベクトル $\mathbf{r}$ と直交し）大きさが $v=|\mathbf{v}|=\dfrac{2.00\times10^2\times10^3\,\mathrm{m}}{60\times60\,\mathrm{s}}=\dfrac{2.0}{3.6}\times10^2\,\mathrm{m/s}$ である。

（巻末解答と異なり、時速を２桁の精度で与えた。理由は、バイクの速度計がそれほど正確だと思えなかったから。「メータが 10%しか信用できない」ことを理由に、制限時速 100 km のところをメータの表示が 110 km/h で走っても違反にならない、と聞いたことがある！ならば、１桁の精度になるのだが、それではつまらないから２桁にした。）

１）円軌道の中心を原点として面積速度を求めると、式(9.38)より

$$\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\frac{1}{2}r\times v\times\sin\theta=\frac{1}{2}r\times v=\frac{1}{2}\times\left(3.6\times10^2\,\mathrm{m}\right)\times\left(\frac{2.0}{3.6}\times10^2\,\mathrm{m/s}\right)=1.0\times10^4\,\mathrm{m^2/s}$$

２番目の等号で、$\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のなす角 θ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が直交するので $\theta=90°$（$\sin\theta=\sin90°=1$）となることを用いた。巻末解答のように有効筋３桁で解答しても、根拠がはっきりしていれば問題ない。

２）円軌道の中心を原点としたとき角運動量ベクトル $\mathbf{l}$（小文字のエル）は、式(9.38)と(9.39)をまとめて

$$\mathbf{l}=2m\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)=m\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

と書ける。$\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$（したがって $\mathbf{r}$ と運動量 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$）が直交するので

６０ｋｇとしておいて３桁とは？　p265

$$|\mathbf{l}|=|m\mathbf{r}\times\mathbf{v}|=m|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|=m|\mathbf{r}||\mathbf{v}|\sin\theta=m|\mathbf{r}||\mathbf{v}|\sin90°=m|\mathbf{r}||\mathbf{v}|=mrv$$

となる。同じ値を１）の結果を使って求めるなら「面積速度の２倍と質量の積」でもよい。すなわち

$$|\mathbf{l}|=2\times\left(1.0\times10^4\,\mathrm{m^2/s}\right)\times60\mathrm{kg}=1.2\times10^6\,\mathrm{J\cdot s}$$

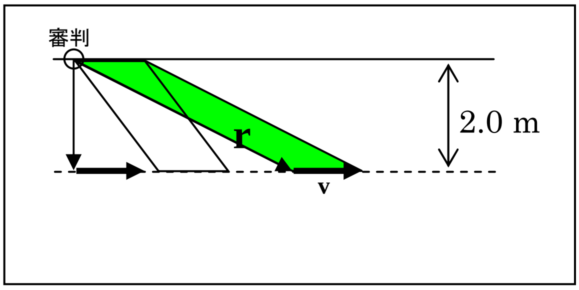
９章

3.　x,y,z 成分をそれぞれ(4,1,2), (2,3,3)とする二つのベクトル **A**, **B** がある。
１）外積 **A**×**B** の各成分を求めよ。
２）**A**, **B** を隣り合う２辺とする平行四辺形の面積はいくらか。

計算は巻末の答えで尽くされている。必要なら
１）式(9.26)に成分による外積の定義がある。
２）図 9.3 を見ると、題意の平行四辺形が描かれている。ベクトル **A**×**B** の大きさ＝面積。

ベクトルの内積や外積では、２つのベクトルが同じ種類の量ではなく、たとえば「力と速度の内積」「力と距離の外積」のような例がたくさんある。このような場合でも図 9.3 のように、同じ空間内に異なるベクトルを並べて描き、計算しているときは「面積」とか「長さ」という「図形の用語」を用いることがある。たとえば「力と距離の外積」では、面積はトルクを表す。

4.　体重 60 kg 重のランナーが直線コースを速度 8.0 m/s で走っている。スタートラインの延長上コースから 2.0 m 離れたところに審判員が立っている。審判員からランナーまでの距離が 8.0 m のとき、審判員から見て、自分のたっている点のまわりの角運動量はいくらか。



「審判員から見て、自分のたっている点のまわりの角運動量」とあるので、原点を審判員の位置とする。審判員もランナーも質点、ひとつの平面内のできごとと考える。ランナーの速度ベクトルを **v** とする（題意より **v** は大きさが 8.0 m/s で方向が一定のベクトル）。ランナーの位置ベクトルを **r** とする。右図を見ると、角運動量をランナーの質量 m で割った量（面積速度の 2 倍）すなわち **r** と **v** がつくる平行四辺形の面積は、「底辺の長さ＝速さ＝一定」「高さ＝審判とランナーの最短距離＝一定」だから一定に保たれる。「審判員からランナーまでの距離が 8.0 m のとき」であってもなくても一定である。とすれば、一番計算しやすいところは、審判とランナーの距離が最短になり **r** と **v** が直交するときだろう。
　審判の位置から見たランナーの角運動量は
　　ランナーの質量×ランナーの速さ×最短距離

$$=60\,\mathrm{kg}\times 8.0\,\mathrm{m/s}\times 2.0\,\mathrm{m/s}=9.6\times 10^{2}\,\mathrm{J\cdot s}$$

5.　宇宙飛行士がある惑星に着陸し、単振り子を用いて重力の測定を行った。長さ 50 cm の振り子で 100 回往復させたら 200 秒かかった。

９章

１）この惑星表面での重力加速度 g'はいくらか。 ２）高さ h のところから物体を初速 0 で自由落下させたら地面に到達する時間は、地球上の何倍か。

§9. 3⑥で学んだ結果を用いる。長さ R の単振り子が重力加速度 g' により単振動するときの振動数 f は式(9. 63)より

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g'}{R}} \qquad (*)$$

である。一回の往復に要する時間（周期）T は

$$T = \frac{1}{f} = \frac{200\mathrm{s}}{100} = 2.00\mathrm{s} \quad \text{よって} \quad f = \frac{1}{2.00}\mathrm{s}^{-1} = 5.00\times10^{-1}\mathrm{Hz}$$

である。

１）(*)より

$$g' = (2\pi f)^2 R = \left(2\pi\times\frac{1}{2.00}\mathrm{s}^{-1}\right)^2\times(0.50\,\mathrm{m}) = \pi^2\times0.50\,\mathrm{m/s^2} = 4.9\,\mathrm{m/s^2}$$

２）巻末解答に付け加えるものはない。