第 2 回　サインとコサイン

1　周期現象とフーリエ級数

§1.1 周期現象と周期関数

例題 0 1

周期現象の例を挙げよ.

問題 01

・周期関数の定義を述べよ.

・周期 $T=2$ の周期関数$f(t)=t\cdots 0\le t\le 2$のグラフを描け．同じ関数を$-1\le t\le 1$で定義せよ.

例題 01

周期 Tのとき，nT（n 整数）も周期となることを示せ.

§1.2 等速円運動と単振動

問題 03

・周期$T=24$ h の等速円運動の角速度はどれだけか.

・10 Hz (1 秒に 10 回振動する)の単振動の角振動数はどれだけか.

・振幅Aで 1 秒にν回（νはギリシャ文字のニュー,速度を表すs）振動する点の座標をサイン関数で表せ.

問題 04

xy平面上で原点を中心とし半径が 2 m の円周上を角速度 10 rad/s で回転する点の時刻 t における座標を記せ．ただし，$t=0$で動径が x 軸となす角は$\pi/6$である.

例題 02

周期がTのサイン関数を表す式を書け.

例題 05

$\sin(\omega t+\phi)$のグラフを，横軸が(tではなく)ωtとなる座標で描き，初期位相ϕの値を図中に示せ.

問題 05

単位円周上の点の位置をもとにして，次の関係を確認せよ.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\qquad \sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\theta,\qquad \sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta),\qquad \cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\theta,\qquad \cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta$$

§1.3 サインとコサインの基本的な性質

問題 06

任意の正整数nについて次の関係を確認せよ

1) $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $\cos n\pi - 1 = \begin{cases} 0 \cdots \text{n: 偶数} \\ -2 \cdots \text{n: 奇数} \end{cases}$

2) $\sin(4n-3)\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos n\pi(4n-3)\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1$, $\cos n\pi(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

3) $\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1$, $\cos n\pi(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

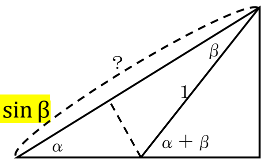
解説は省略，必要なら高校数学にもどって復習せよ．

例題 06

サインの加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

を表す右図を解説せよ



例題 07

上の加法定理から**コサインの加法定理**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を導け

問題 07

タンジェントの加法定理を導け． **ヒント**：サインとコサインの加法定理を用いる．

問題 08

加法定理から次の関係式を導け．

1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$

2) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$

3) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}$

ヒント：

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$とその$\beta$の符号を反転した式$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ とそのβの符号を反転した式 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

を組み合わせて連立方程式を解く．

問題 09

1) $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ． $\sin^2 t$ のグラフは？ 周期は？

2) $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ． $\cos^2 t$ のグラフは？ 周期は？

3) $\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$を確かめよ． $\cos^3 t$は？

問題 10

周期 Tの関数$f(t)$について$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$が成り立つことを示せ． ただし$a$は任意．

問題 11

サインとコサインの直交性を示す次の積分を確認せよ.

1) $\int_0^{2\pi} \sin \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = 0$

2) <u>整数</u> n, m に対し$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \cos mt\,\mathrm{dt} = 0$

3) <u>整数</u> n に対し$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin nt\, dt = 0$

4) <u>整数</u> $n,\ m$ に対し$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt\,\mathrm{dt} = \pi\,\delta_{mn}$

問題 12

3×3の行列要素が$S_{nm} = n\delta_{nm}$のとき，行列を具体的に書き表せ.

例題 08

角振動数$\omega = 2\pi/\mathrm{T}$ のサイン・コサインについて次の積分を確かめよ

$$\int_0^{\mathrm{T}} \begin{cases} \sin n\omega t \cdot \sin m\omega \mathrm{t} \\ \cos n\omega t \cdot \cos m\omega \mathrm{t} \end{cases} \mathrm{dt} = \frac{\pi}{\omega}\delta_{mn} = \frac{\mathrm{T}}{2}\delta_{mn}, \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t\ \mathrm{dt} = 0$$

§1.4 フーリエ級数

例題 09

(i) $\sin^2 t$, (ii) $\sin^3 t$, (iii) $\sin^2 t + \cos^3 t$ をフーリエ展開せよ.

§1.5 フーリエ係数の算出

例題 10

サイン・コサインの直交性と，フーリエ級数の定義から上の式（∗）を導け.

問題 13

積分区間について

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt$$

を確認せよ.

例題 11

周期Tのとき，フーリエ係数を求める積分が次のようになることを示せ.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$$

§1.6 フーリエ・サイン級数とフーリエ・コサイン級数

問題 14

奇(偶)関数のフーリエ展開はサイン（コサインと定数項）<u>だけ</u>となることを確認せよ．このことから，$f(t)$が偶（奇）関数なら，計算をせずに，b_n (a_n)がすべて 0 となることが分かる．

§1.7　フーリエ係数の計算

例題 12

次の周期Tの周期関数のグラフを描き，フーリエ係数を計算せよ．$f(t)$のフーリエ展開を記せ．

$$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1 \cdots \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

問題 15

次の周期Tの周期関数のグラフを描き，フーリエ係数を計算せよ．$f(t)$のフーリエ展開を記せ．

(i) $f(t) = \begin{cases} 1 \cdots -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -1 \cdots -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \text{で上記以外} \end{cases}$　ヒント：矩形波±１，duty 50%,　t=0 が「1」の中央

(ii) $f(t) = \begin{cases} 1 + 4\frac{t}{T} \cdots -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - 4\frac{t}{T} \cdots \quad 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$　ヒント：三角波　±１，t=0 でピーク，左右対称

(iii) $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{T} \cdots 0 < t < T$　ヒント：のこぎり波±1,　1/2 下にずらせば奇関数

(iv) $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{T} \cdots 0 < t < T$　ヒント：のこぎり波±1,　1/2 下にずらせば奇関数

2 章　複素指数関数

問題 01

次の値を計算し，複素平面上で位置を記せ．

(i) $i^3 = ?$,　$\frac{1}{i} = ?$

(ii) $e^0 = ?$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = ?$,　$e^{\pi i} = ?$,　$e^{\frac{3}{2}\pi i} = ?$, $e^{2\pi i} = ?$, $\mathrm{e}^{3\pi i} = ?$, $\mathrm{e}^{n\pi i} = ?$ (n: 整数)

(iii) $(\sqrt{3} + i)(1 - i) = ?$　（極形式で答えよ）

(iv) $-3 = 3\,\mathrm{e}^{?}$

問題 02

次の関係を確かめよ．

(i)　$|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$,　$|re^{i\theta}| = r$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|\bar{z}| = |z|$,　$|z^n| = |z|^n$,　$|z|^2 = |z^2| = z\,\bar{z}$,　$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,　$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = e^{-i\theta}$,　$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(iii) $f(z) = z^3 + z^2 + 1 \to \overline{f(z)} = f(\bar{z})$

(iv) $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$はサインとコサインの加法定理を表す．

問題 03

つぎの関係を確認せよ：　$\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} = \cos\omega t$，$\mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} = \sin\omega t$

問題 04

(i) 1 秒に 10 回振動する現象を表すために$e^{i\omega t}$の形の関数を用いるとき，ωの値は?

(ii) $z(t) = e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2\cos n\omega t$は「時計回りと反時計回りの等速円運動を合成すると実軸上の単振動になる」ことを確認せよ.

(iii) $-e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$を計算により確認し，その内容を複素平面上の操作として述べよ.

(iv) $z(t) = e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} = 2i\sin n\omega t$は，虚軸上の単振動となることを確認せよ.

例題 01

複素指数関数の直交関係を調べよ.

解

$\omega = \frac{2\pi}{T}$とすると，$\int \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}$より

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega t}\right]_0^T = \frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega T} - e^0\right] = \frac{1}{i\omega}\left[e^{i2\pi} - e^0\right] = \frac{1}{i\omega}[1-1] = 0$$

これは

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \int_0^{\mathrm{T}} \{\cos\omega t + i\sin\omega t\}dt = \int_0^{\mathrm{T}} \cos\omega t\,dt + i\int_0^{\mathrm{T}} \sin\omega t\,dt = 0 + 0i = 0$$

と計算してもよい.

　整数$k \neq 0$とすると

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{ik\omega t}dt = \frac{1}{ik\omega}\left[e^{ik\omega T} - e^0\right] = \frac{1}{ik\omega}\left[e^{i2\pi\times k} - e^0\right] = 0$$

$k = n - m,\ n \neq m$のとき

$$\int_0^T \mathrm{e}^{ik\omega t}dt = \int_0^T \mathrm{e}^{i(n-m)\omega t}dt = \int_0^T \mathrm{e}^{in\omega t} \times e^{-im\omega t}dt = \int_0^T \mathrm{e}^{in\omega t} \times \overline{e^{im\omega t}}dt = 0$$

$n = m$のとき

$$\int_0^T \mathrm{e}^{in\omega t} \times \overline{e^{im\omega t}}dt = \int_0^T \mathrm{e}^0 dt = \int_0^T 1dt = T$$

以上をまとめると

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{in\omega t} \times \overline{e^{im\omega t}}dt = \delta_{mn}},\ \ \omega T = 2\pi$$

積分区間を変更して

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{in\omega t} \times \overline{e^{im\omega t}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{in\omega t} \times \overline{e^{im\omega t}}dt = \delta_{mn}$$

とも書くことが出来る．サイン・コサインの直交関係と同じ内容を 1 本の式で表している.

問題 05

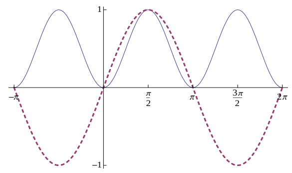
3 個の関数 $\mathrm{e}^{2\pi i t}$，$\overline{\mathrm{e}^{3\pi i t}}$，$\mathrm{e}^{2\pi i t} \times \overline{\mathrm{e}^{3\pi i t}}$について，各々の実部のグラフを重ねて描け．各々の虚部のグラフも重ねて描け.

1 章　解答・解説と Q&A

問題 09　計算式を詳しく教えてください：

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ。　$\sin^2 \mathrm{t}$ のグラフは？　周期は？

問 08 の 1)で $\alpha = \beta = \mathrm{t}$ とおく



・$\sin^2 t = \sin t \sin t = \frac{1}{2}\{\cos(t-t) - \cos(t+t)\}$

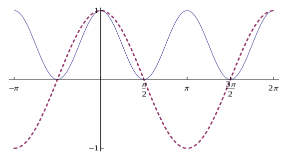
$$= \frac{1}{2}\{\cos 0 - \cos 2t\} = \frac{1}{2}\{1 - \cos 2t\}$$

あるいは，$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$ を解いてもよい. .

・$\sin^2 t$の周期は$\cos 2\mathrm{t}$ の周期 π と一致する.

$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ.　$\cos^2 \mathrm{t}$ のグラフは？　周期は？

問 10 の 2)で$= \beta = \mathrm{t}$ とおく：



・$\cos^2 t = \cos \mathrm{t} \cos \mathrm{t} = \frac{1}{2}\{\cos(\mathrm{t}-\mathrm{t}) + \cos(\mathrm{t}+\mathrm{t})\}$

$$= \frac{1}{2}\{\cos 0 + \cos 2\mathrm{t}\} = \frac{1}{2}\{1 + \cos 2\mathrm{t}\}$$

・周期は π である.

$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin \mathrm{t} - \frac{1}{4}\sin 3\mathrm{t}$を確かめよ.　$\cos^3 t$は？

$\sin^3 t$　：

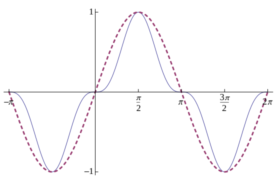
$$\sin^3 t = \sin t \times \sin^2 t = \sin t \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos 2t$$

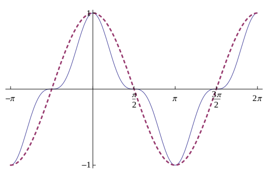
$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\sin(\mathrm{t}-2\mathrm{t}) + \sin(\mathrm{t}+2\mathrm{t})\} = \frac{1}{2}\sin t - \frac{-1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

$\cos^3 t$　：

$$\cos^3 t = \sin^3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$$

$\sin^3 t, \cos^3 t$の周期は，それぞれ$\sin \mathrm{t}, \cos \mathrm{t}$の周期に一致するので，$2\pi$ となる.





問題 10：　証明問題をどのように答えてよいかわかりません.

周期 Tの関数$f(t)$について$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$が成り立つことを示せ.　ただし$a$は任意.

$f(t)$が周期 T の周期関数なので$f(t) = f(t+T)$が成り立つ. そこで被積分関数を置き換えると

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t+T)dt$$

となる. この式の右辺で積分変数を$\tau = t + T$に置き換えると，$d\tau = dt,\ \tau: T \to a + T$である：

$$\int_0^a f(t+T)dt = \int_T^{a+T} f(\tau)d\tau = \int_T^{a+T} f(t)dt$$

最後の等号は τ を t と書き直した．つぎに

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^T f(t)dt$$

のように積分区間を分解し右辺第一項を書き換えると

$$\int_0^T f(t)dt = \int_T^{a+T} f(t)dt + \int_a^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$$

となり，題意を示すことができた．

「周期関数と t 軸に挟まれた部分の 1 周期にわたる面積は，どこから初めても同じ」という結論だが，これが自明だと思うなら証明は不要．

問題 11　1 年の積分の復習だとは思うのですが・・・

サインとコサインの直交性を示す次の積分を確認せよ．

微分と積分の教科書 p.98「問題 4-4」とその関連教材を参照．

4）$n = m$と$n \neq m$に分けて計算する

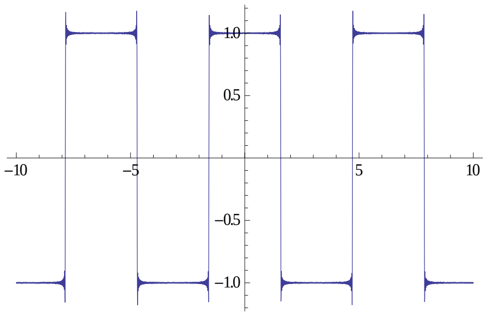
問題 12　答えをお願いします．

3×3の行列要素が$S_{nm} = n\delta_{nm}$のとき，行列を具体的に書き表せ．

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

問題 15　詳しく解説してください．

(i)　$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -1 \cdots -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \text{で上記以外} \end{cases}$



$b_n = 0$（偶関数），　$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0,$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$\underbrace{=}_{*} 2 \times \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} (+1)\cos n\omega t\, dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (-1)\cos n\omega t\, dt\right)$$

$$= \frac{4}{T}\frac{1}{n\omega}\left([\sin n\omega t]_0^{T/4} - [\sin n\omega t]_{T/4}^{T/2}\right) = \frac{2}{n\,\pi}\left(2\sin\frac{n\pi}{2} - \sin n\pi\right) \underbrace{=}_{**} \frac{4}{n\,\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\,\pi} \cdots n\text{が } 1,5,9,\ldots \\ -\frac{4}{n\,\pi} \cdots n\text{が } 3,7,11,\ldots \end{cases}$$

*　まず，中辺の積分区間が$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$だが，最右辺は$\left[0,\frac{T}{2}\right]$となり同時に「2×」となっている：偶関数の（原点について）対称な区間にわたる定積分は、原点の片側だけを積分して 2 倍すれば同じ値になることによる．つぎに，どんな定積分でも、積分区間を分割することができる：$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$　がいつでも成り立つ．問題の関数が T/4 を境に値が変わることに注目し，T/4 で積分区間を分割し積分計算ができるようにした．

** $-\sin n\pi$ は常に 0 なので $\frac{2}{n\pi}\left(-\sin n\pi+2\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$となる. $\sin\frac{n\pi}{2}$の値は, $n=1,2,3,4,\cdots$と変化するにしたがい$1,0,-1,0$のセットを繰り返す. 一般的にいうと「n が偶数のときは 0, n が 1 から始まる公差 4 の数列に属すときは 1, n が 3 から始まる公差 4 の数列に属すときは-1」

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t-\cdots\right)$$

別解：この$f(t)$は 例題 12 の関数を T/4 だけ左にずらしたものであることを用いる.

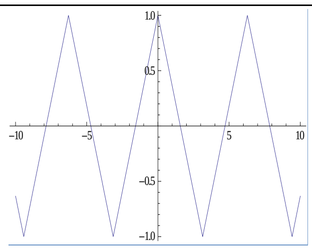
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)+\frac{1}{3}\sin 3\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)+\frac{1}{5}\sin 5\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)+\cdots\right)$$

$$\sin\left[n\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]=\sin n\omega t\cos\frac{n\omega T}{4}+\cos n\omega t\sin\frac{n\omega T}{4}=\sin n\omega\boxed{t\cos\frac{n\pi}{2}}+\cos n\omega t\boxed{\sin\frac{n\pi}{2}}$$

例題 12 は奇数の項だけで構成されているから，上式で$n=2m-1$とおくと最右辺第一項の□内は$\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}=0$，第二項の□内は $\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}=\begin{cases}1\cdots(2m-1)\text{が }1,5,9,\ldots\\-1\cdots(2m-1)\text{が }3,7,11,\ldots\end{cases}$ となる.

(ii)

$$f(t)=\begin{cases}1+4\frac{t}{T}\cdots-\frac{T}{2}<t\le 0\\1-4\frac{t}{T}\cdots\quad 0<t\le\frac{T}{2}\end{cases}$$ 三角波 ±1，t=0 でピーク，左右対称



偶関数だから　$b_n=0$

$a_0=0$,　$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt=2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1-4\frac{t}{T}\right)\cos n\omega t\,dt$

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t\,dt=0$$

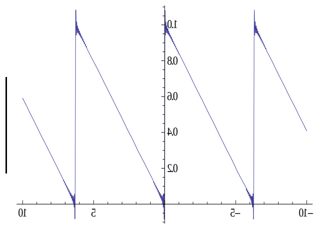
$$\int_0^{\frac{T}{2}}t\cdot\cos n\omega t\,dt=\left[\frac{1}{n\omega}t\sin n\omega t+\frac{1}{(n\omega)^2}\cos n\omega t\right]_0^{T/2}=\frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\pi-1)$$

$$a_n=2\times\frac{2}{T}\times\frac{-4}{T}\frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\frac{8}{n^2\pi^2}\cdots\text{n が奇数}\\0\cdots\text{n が偶数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\right\}$$

(iii)

$f(t)=1-\frac{t}{T}\cdots 0<t<T$　　のこぎり波±1,　1/2 下にずらせば奇関数



$$\int_0^T t\cdot\sin n\omega t\,dt=\left[-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t+\frac{1}{n^2\omega^2}\sin n\omega t\right]_0^T=\frac{-T}{n\omega}\cos 2\pi n=\frac{-T}{n\omega}$$

$a_0/2\underbrace{=}_{*}1/2$,　$a_n\underbrace{=}_{**}0$　　($f(t)$は$a_0/2$ の項を除くと奇関数だからコサインの成分を含まない)

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T -\frac{t}{T}\cdot\sin n\omega t\, dt = -\frac{2}{T^2}\frac{-T}{n\omega} = \frac{1}{n\pi}$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

*サインやコサインは 0 のまわりの振動だから（どのように和をつくっても），振動の中心の値は$\frac{a_0}{2}$だけの受け持ちとなる．$f(t) = 1 - \frac{t}{T}$　のグラフを観察すると、縦軸の値 1/2 を中心にして上下均等に振動する（最大値と最小値の中点を見ているわけではない．上下の面積が等しくなるところ）．こうして、計算をしなくても$a_0/2=1/2$ を得る．

計算で求めるには、定義に従って

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\times T - \frac{2}{T^2}\times\int_0^T tdt = \frac{2}{T}\times T - \frac{2}{T^2}\times\frac{1}{2}T^2 = 2 - 1 = 1$$

となるので

$a_0/2=1/2$

**　計算で確認する：

$$\int_0^T t\cdot\cos n\omega t\, dt = \left[\frac{1}{n\omega}t\sin n\omega t + \frac{1}{(n\omega)^2}\cos n\omega t\right]_0^T = \frac{1}{n\omega}(T\sin n\omega T - 0) + \frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\omega T - 1)$$

$$\underbrace{=}_{\omega T=2\pi} \frac{1}{n\omega}(T\underbrace{\sin(n(2\pi))}_{0} - 0) + \frac{1}{(n\omega)^2}\left(\overbrace{\cos(n(2\pi))}^{1} - 1\right) = 0$$

(iv)

$f(t) = \frac{t}{T}\cdots 0 < t < T$　　のこぎり波±1,　1/2 下にずらせば奇関数

(iii)の符号を反転し，１加える

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

例題 12.　関数が「原点でジャンプする」とは、どういうことですか？

A.　$\lim_{t\to+0} f(t) \neq \lim_{t\to-0} f(t)$ という意味です。

例題 12.　グラフを思い浮かべることができません。

A. 思い浮かべることができないときは、定義で言われたとおりに紙の上に点を打っていきましょう。たとえば、$f(t) = \begin{cases} 1\cdots 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1\cdots \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ であれば、

① T を何か適当な値（1 でも 2 でもπでも）にして、

② グラフの横軸が$0 < t < \frac{T}{2}$の間は縦軸の値が 1 の点をたくさん打つのです。

③ $\frac{T}{2} < t < T$についても同様です。

④ そして周期関数であることを考慮し、グラフを横に 1 周期分ずらしたものを貼り付けることでグラフを描くことができます。

問題 14.　偶関数か奇関数かの判断がつきません。

A.　偶関数は$f(-t) = f(t)$, 奇関数は$f(-t) = -f(t)$となるものです。

問 18 ではミスプリが多くて混乱した可能性もありますが、訂正版にもとづいて論じましょう。この例のように<u>場合分けをして書いてある関数</u>は、式を追いかけて偶奇性を調べることは（できるのですが）やめて、グラフの観察がおすすめです。

グラフが「縦軸を鏡として映したときにできる対称図形」なら偶関数、「原点のまわりに 180 度回転して重なる対称図形」なら奇関数です。

問題 14. 奇関数・偶関数の判定をグラフを描かずに行うにはどうすればよいですか？

A.「偶か奇か」は「 $f(-t) = f(t)$か$f(-t) = -f(t)$か」ですから、通常はこの定義どおりに計算すればよいのです（たとえば、$(-t)^2 = t^2$：偶関数、　$(-t)^3 = -t^3$：奇関数）が、ここで学ぶ周期関数のように 1 周期について定義があり、その定義が変数の正の領域だけになっていると式の変形だけで判定するのが少しめんどうかもしれないので、ぜひグラフを描いて判定するようにしてください。

質問に対する回答は：

$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 \cdots \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$について、周期が T ですから、

$$f(t) = 1 \cdots 0 < t < \frac{T}{2} \text{から} f(t) = f(t-T) = 1 \cdots 0 < t < \frac{T}{2}$$

となり$\tau = \mathrm{t} - \mathrm{T}$とおけば

$$f(\tau) = 1 \cdots -T < \tau < -\frac{T}{2}$$

を得ます。$f(t) = \boxed{-1} \cdots \frac{T}{2} < t < T$と“t<0 の部分で対”になる関数が$f(t) = \boxed{1} \cdots -T < \tau < -\frac{T}{2}$となりました。残りも同様です。あまり形式にこだわらず、何を証明したいかという「絵」を描いてそれを数式で表せるといいですね。

例題 12. フーリエ係数の積分区間が

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,$　 となったり　$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt$

となったりしています！

A. まず、上の式は$f(t)$の周期が 2π、下の式は周期が Tです。つぎに、周期関数の一周期にわたる定積分は積分区間の端をどこに選んでも同じ値になります。腑に落ちない式が出てきたら、どういう条件の下で用いているか、それ以前の問などで何を前提の知識とするように求められているか、前へもどって調査しましょう。

例題 12　関数が

$$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 \cdots \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

と与えられているのに、積分は

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin n\omega t\,dt + \int_0^{T/2}(+1)\sin n\omega t\,dt\right)$$

のように、与えられたのと異なる区間になっていますが、どうしてですか？

A. 関数は周期 T を持つことになっています。それをもとに定義に使った[0, T]よりも広い範囲でグラフを描くと、事情が自ずと明らかになります。

2 章　解答・解説

問題 01

次の値を計算し，複素平面上で位置を記せ.

(i) $i^3 =?$, $\frac{1}{i} =?$

(ii) $e^0 =?$, $e^{\frac{\pi}{2}i} =?$, $e^{\pi i} =?$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} =?$, $e^{2\pi i} =?$, $\mathrm{e}^{3\pi i} =?$, $\mathrm{e}^{n\pi i} =?$ (n: 整数)

(iii) $(\sqrt{3}+i)(1-i) =?$ （極形式で答えよ）

(iv) $-3 = 3\,\mathrm{e}^{?}$

解

(i) $i^3 = -i$, $\frac{1}{i} = -i$

(ii) $e^0 = 1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$, $\mathrm{e}^{3\pi i} = -1$, $\mathrm{e}^{n\pi i} = (-1)^n$

(iii) $(\sqrt{3}+i)(1-i) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i} \times \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$

(iv) $-3 = 3\,(-1) = 3\,\mathrm{e}^{\pi i}$

問題 02

次の関係を確かめよ.

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|\bar{z}| = |z|$, $|z^n| = |z|^n$, $|z|^2 = |z^2| = z\,\bar{z}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$, $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$, $\left|re^{i\theta}\right| = r$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(iii) $f(z) = z^3 + z^2 + 1 \to \overline{f(z)} = f(\bar{z})$

(iv) $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$はサインとコサインの加法定理を表す.

解

(i)

- $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = 1$
- $\left|re^{i\theta}\right| = |r\cos\theta + ir\sin\theta| = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r$
- $|z_1 z_2| = \left|(r_1\,e^{i\theta_1})(r_2\,e^{i\theta_2})\right| = \left|r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right| = r_1 r_2 = \left|r_1\,e^{i\theta_1}\right|\left|r_2\,e^{i\theta_2}\right| = |z_1||z_2|$
- $|\overline{x+iy}| = |x-iy| = \sqrt{(x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$あるいは$|\bar{z}| = \left|\overline{re^{i\theta}}\right| = \left|re^{-i\theta}\right| = r = |z|$
- $|z^n| = |z^{n-1}z| = |z^{n-1}||z|$による数学的帰納法，あるいは$z^n = \mathrm{r}^{\mathrm{n}}e^{in\theta}$ を用いる
- $|z^2|=|z|^2 = (x^2+y^2) = (x+iy)(x-iy) = z\,\bar{z}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(ii)

- $\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) = \overline{(x_1+iy_1)}+\overline{(x_2+iy_2)}$
- $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$
- 三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長い
- $\overline{z^3+z^2+1} = \overline{z^3} + \overline{z^2} + 1 = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 + 1 \to \overline{f(z)} = f(\bar{z})$
- $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\times(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

問題 04

(i) 1 秒に 10 回振動する現象を表すために$e^{i\omega t}$の形の関数を用いるとき，ωの値は?

(ii) $z(t) = e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2\cos n\omega t$は「時計回りと反時計回りの等速円運動を合成すると実軸上の単振動になる」ことを確認せよ.

(iii) $-e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$を計算により確認し，その内容を複素平面上の操作として述べよ.

(iv) $z(t) = e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} = 2i\sin n\omega t$は，虚軸上の単振動となることを確認せよ.

解

(i) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 10\ \mathrm{Hz} \simeq 62.8\ \mathrm{rad/s}$

(ii) 略

(iii) $-e^{-in\omega t} = (-1)e^{-in\omega t} = e^{i\pi}e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$

$-e^{-in\omega t}$は，$e^{-in\omega t}$と原点に対して対称な位置にある．$e^{i\theta}$は半径 1 の単位円上にあるので，原点に対して対称な位置はπだけ回転した位置と同等である.

(iv)略

問題 05

3 個の関数 $e^{2\pi it}$，$\overline{e^{3\pi it}}$，$e^{2\pi it} \times \overline{e^{3\pi it}}$について，各々の実部のグラフを重ねて描け．各々の虚部のグラフも重ねて描け.

解

赤：$e^{2\pi it}$，緑：$e^{3\pi it}$，黒：$e^{2\pi it} \times \overline{e^{3\pi it}}$

左：実部，右：虚部