第３回課題「単振動」の Q&A

$c\,\mathrm{e}^{i\omega t}+\bar{c}\,e^{-i\omega t}$が実数となるのはなぜですか.

$\bar{c}$はcの複素共役なので$\bar{c}\,e^{-i\omega t}$は$c\,\mathrm{e}^{i\omega t}$の複素共役となります．複素共役どうしの和は実数です. ちなみに, ・$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$，$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$　：$z_k=x_k+i\,y_k, k=1,2$ とおいて計算すればただちに分かる ・$\overline{f(z)}=f(\bar{z})$：　$f(z)$が（複素指数関数のように）z のべき級数で定義されているなら上の四則演算から明らか.

振幅が微小のとき単振動だが，振幅が大きくなると単振動でなくなる例を具体的に挙げてもらえますか.

たとえば，天井から長さℓの糸でつるされたおもりの運動．実際，振れの角をθとすると，θについての運動方程式が

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

となりますが，この運動が単振動となるのは$\sin\theta$をθで近似できるときです：

$$\sin\theta\simeq\theta$$

が可能なのはθが十分に小さな値（すなわち微小な振幅）のときに限られます.

　実は「微小振動のときは必ずフックの法則が成立する」と言ったほうが正確です．ほとんどの振動現象は振幅を大きくすると単振動ではなくなります.

Q2

どれが作用でどれが反作用ですか？

力は２つの物体の間に作用します．いいかえると，物体ＡがＢに力を及ぼすとき，ＢはＡに力を及ぼしています．ＡがＢに及ぼす力とＢがＡに及ぼす力は、大きさが同じで逆向きとなります．ＡがＢに作用（「力」と読み替えてかまいません）を及ぼすとき，ＢはＡに反作用を及ぼします．どちらが作用でどちらが反作用かは決まりがあるわけではありません.

・バネにつながれて滑らかな水平面上で運動する物体：

　物体にはバネの片端から力が加わり，物体が水平面内で加速度運動をする．この力の反作用として物体はバネの片端に力を及ぼす．この力によってバネは変形する.

　物体には床面から垂直上向きの力が加わる．この力の反作用として物体は床面を押す.

　物体には重力が加わる．重力は地球が物体を引く力であり，その反作用として物体が地球を引く.

・天井から糸でつるされて鉛直面内で運動する物体

　物体には糸の張力が加わる．この力の反作用は物体が糸を引っ張る力である.

　物体には重力が加わる．その反作用として物体は地球を引く.

　作用反作用には関係ないが，物体の加速度ベクトルの「円の半径方向の成分」は，糸の張力と重力の成分が作り出し，「接線方向の成分」は重力だけが作り出している.

・お椀の中で運動する物体

　物体には床面から力が加わる．その反作用として物体は床面を押す.

　物体には重力が加わる．その反作用として物体は地球を引く.

解答例をお願いします.

１次元運動の場合，物体に加わる力が物体の位置だけの関数であるとき，その力を保存力という.

保存力を相殺する力を加えて物体を静かに点ＡからＢに移動するとき，この力がした仕事が２点ＡＢ間の物体の

位置エネルギーの差である．
力学的エネルギー保存則は，ある保存力だけによって運動する物体の運動エネルギーとその位置エネルギーの和が常に一定値をとることを述べる．

Q5

解答にある「$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -R\omega^2\frac{\vec{r}}{r} = -\omega^2\vec{r}$」という式の説明をお願いします.

半径R，角速度ωの等速円運動の加速度ベクトルは必ず円の中心を向き，加速度の大きさは$R\omega^2$ です．この物理的な状況を式で表したのです．
円の中心を原点とし，円周上の点の位置を $\vec{r}$とします．加速度の向きは$\vec{r}$と逆向き($-\vec{r}$)です．向きだけを表すために長さ$\vec{r}$を$r = |\vec{r}|$で割り，大きさを 1 にした単位ベクトルを用います：$-\frac{\vec{r}}{r}$ ．　加速度ベクトルは

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -R\omega^2\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{r}$は円周上の点なので，$r = R$とすると

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -R\omega^2\frac{\vec{r}}{r} = -R\omega^2\frac{\vec{r}}{R} = -\omega^2\vec{r}$$

となります.

Q6

$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt$ の $v(0)$はどこから出てきたのですか.

$a = \frac{dv}{dt}$　は加速度の定義です．vは「微分するとaになるもの」であり，このことを不定積分の記号を用いて書き直せば(積分定数をCとする)

$$v(t) = \int a(t)dt + C$$

です．$a(t)$の原始関数として求めた$v(t)$は，積分定数Cだけ不定です.
Cを決めるには，$t = 0$で速度が$v(0)$という値をとることを用います．そうすると$v(t)$は$a(t)$の定積分を用いて

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\,dt \rightarrow \quad v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt$$

と表せます.

解答に「$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t) - A\omega t$」の右辺の最終項のような式が出てきますが，これを説明してください.

$a(t) = -\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega t)$ を定積分して速度を求めると

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt = v(0) + A\,\omega\cos(\omega t) - A\,\omega$$

となります．$v(0) - A\,\omega$は定数なので，この値が 0 でなくても，加速度は$a(t) = -\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega t)$です.
さらに定積分して位置を求めると

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t) - A\omega t$$

です．$v(0)t - A\omega t$は等速度運動を表しています．けっきょく，振動の中心が等速度で運動していれば，その加速

度は（中心の速度によらず）$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$となります．力学で学んだ「ガリレイ変換により加速度は変わらない」という例です．

Q7

振幅や角度を求める式の導出方法がわかりません．

スライドのノートにある説明を採録します．

まず単振動の位置と速度を表す式：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta),\ v(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \theta)$$

$t = 0$　における位置x_0と速度 v_0は

$$x_0 = x(0) = A\cos\theta, \qquad v_0 = v(0) = -A\,\omega\sin\theta$$

両式を整理して，（x_0, v_0, ωを既知として）Aとθを求める式に変形する：

$$\frac{x_0}{A} = \cos\theta, \qquad \frac{v_0}{-A\omega} = \sin\theta$$

・両式の辺々を割ると

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \boxed{\tan\theta = -\frac{v_0}{x_0\omega}}$$

・両辺を 2 乗して足すと

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{-A\omega}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \rightarrow \boxed{\mathrm{A} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

となる．

Q9

慣性能率の計算の過程がよく分かりませんでした．

【慣性能率（慣性モーメント）】回転運動において（角度を座標と見なしたときの）質量に相当する量が慣性能率です．位置座標の変わりに回転の角度 θ を運動を表す変数と考えると$\omega = \frac{d\theta}{dt}$が速度に対応する量と成ります．

たとえば，質量mの質点が回転軸からの距離rを保って角速度 ω で回転するとき，

$$\text{運動エネルギー} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,\ I = mr^2$$

となり，$I = mr^2$（これが慣性能率）が質量に相当する役目をもちます．

【剛体の慣性能率】物体が，形を変えずに，ある軸のまわりに回転運動するとき，物体のどの部分も同じ角速度で回転します．たとえば 2 個の質点m_1, m_2がそれぞれ軸から距離r_1, r_2にあって，共通の角速度 ω で回転するとき，全体の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1{r_1}^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2{r_2}^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,\ \ I = I_1 + I_2, \qquad I_k = \frac{1}{2}m_k r_k^2$$

となり，各部分の慣性能率の単純な和が全体の慣性能率となります．一般的には積分を用いて慣性能率を計算することができます．

【リングの慣性能率】

質量m，半径rの円形の細いリングを想定します．リングの面と垂直に，円の中心を貫く回転軸を考えます．この軸のまわりの慣性能率を計算します．

リングをN個の微小な部分に分割すると，各微小部分の質量は$dm = \frac{m}{N}$でありその慣性能率は

$$dI' = dm \times r^2 = \frac{m}{N} r^2$$

リング全体の慣性能率は

$$N \times dI' = mr^2$$

【円板の慣性能率】

円板の半径をR，厚みをh，密度ρが一定であり質量をMとします．

円板を，様々な半径の細いリングに分解します．細いリングは，半径が$r = 0 \sim R$で無数にあります．

半径$r \sim r + dr$のリングは，drが微小なとき体積は$2\pi r dr \times h$となるので，質量が$dM = 2\pi h r \rho dr$ですから，このリングの慣性能率は

$$dM \times r^2 = 2\pi h \rho r^3 dr$$

円板全体の慣性能率は

$$I = \int_0^R 2\pi h \rho\, r^3\, dr = 2\pi \rho h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \pi \rho h\, R^4 = \frac{1}{2} \left(\pi R^2\, h\, \rho \right) R^2 = \frac{1}{2} M\, R^2$$

となります．

ひげゼンマイの力が$-k\,R\theta$と表せるところが分かりませんでした．

ひげゼンマイの作りかたは，薄くて細長い帯状の金属のバンドの一端を中心の軸に固定し，渦巻き状にバンドを何回も巻き付けていきます．軸を回転しないように固定し，一番外側に来たバンドの端を円周にそってある角度回転させるとバンドが変形して復元力が発生します．回転角をθとすると，θが小さいときは変形の量とθが比例し，復元力とθが比例するはず．変形の正体は，バンドの曲がり方の変化であって，バンドの伸び縮みではありません（この事情は弦巻バネでも同じこと）．一番外側に来たバンドの端の移動距離$R\theta$を変形量として考える（べつにそうしなければならない理由はないのだが）と，もとに戻ろうとする復元力は$R\theta$に比例して$-kR\theta$と書けるはずです．

Q10

位置エネルギーを$V(r) \simeq D_e\, \alpha^2\, (r - r_e)^2$の形にする手順（考え方）が分かりませんでした．

位置エネルギーの極小点では

$$V(r) = \underbrace{V(r_e)}_{\substack{\text{エネルギーの}\\ \text{原点をここに}\\ \text{とれば，0とおける}}} + \underbrace{\underbrace{\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_e}}_{\substack{\text{極小なので}\\ \text{傾きは0}}} (r - r_e)}_{\text{1次の項は0}} + \underbrace{\frac{1}{2!} \cdot \left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_e} (r - r_e)^2}_{\substack{\text{よほど特殊な位置エネルギー}\\ \text{でないかぎり，この項が}\\ \text{存在するはず}}} + \underbrace{\frac{1}{3!} \cdot \left.\frac{d^3V}{dr^3}\right|_{r=r_e} (r - r_e)^3 + \cdots}_{\substack{\text{微小な変位のときは}\\ (r-r_e)^3\text{があるために}\\ \text{非常に小さくなり}\\ \text{無視する近似が許される}}}$$

$$\simeq \frac{1}{2!} \cdot \left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_e} (r - r_e)^2$$

という形になることを見込んで

$$V(r) = D_e \left(1 - e^{\alpha \cdot (r - r_e)}\right)^2$$

を観察します．$\left(1 - e^{\alpha \cdot (r - r_e)}\right)^2$を展開して導関数を求めてテーラー展開しても間違えではありませんが，

「$\left(1 - e^{\alpha \cdot (r - r_e)}\right)$の 2 乗によって$V(r) \simeq \frac{1}{2!} \cdot \left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_e} (r - r_e)^2$となる近似」が成り立つためには，2 乗する前の段階で「$\left(1 - e^{\alpha \cdot (r - r_e)}\right)$を$(r - r_e)$の 1 次式で近似する」のと同じことだと分かります．それで

$$e^{\alpha \cdot (r - r_e)} \simeq 1 + \alpha \cdot (r - r_e)$$

から計算を開始すれば十分であると気づきます．