第３回　振動

Q1（再録）

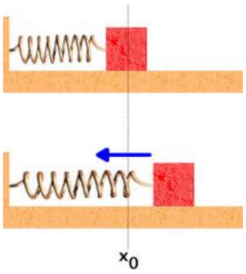
周期現象・振動の例を，できるだけ異なるジャンルから，いくつか示せ．

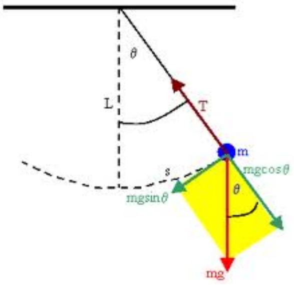
それらの振動する量は何か．

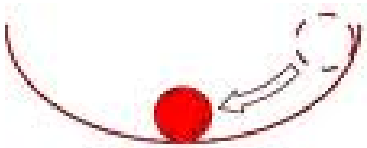
それらが振動する様子を述べよ．

Q2

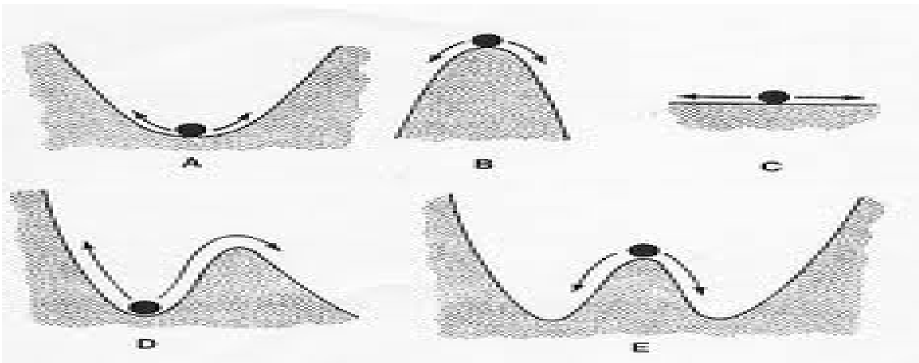
（1）下図の例について，　振動する物体にはどのような力が作用するか，その反作用は何か







(2)　下図の例について，力学的エネルギー保存則を説明せよ（まず保存力の定義，つぎに位置エネルギーの定義，最後に保存則を述べること）．位置エネルギーの図を用いて運動を論じる方法を説明せよ．



Q3

(1) 振幅，振動数，角振動数，周期という用語を解説し，諸量の関係を数式も用いて記せ．

(2) 位置が時間のサイン関数になるとして、この振動の x-t 図を描き、グラフの中に振幅、周期を記入して示せ．

Q4

x軸上を単振動(振幅A, 角振動数ω，初期位相φ，サイン関数)する物体について

(1) この単振動をする物体が従う運動方程式を記せ．

(2) 諸量の符号について（どのような経緯で正あるいは負となっているか）説明せよ．

Q5

半径R，角速度 ω の等速円運動をする物体について

(1) 円の中心を原点として，2 次元の運動方程式をベクトル記号を用いて記せ．

　ヒント：円運動の加速度と半径と角速度の関係．加速度ベクトルと中心からの位置ベクトルの向き．

(2) この運動方程式を，直交座標系による成分に関する式になおせ．

(3) (2)で求めた各成分ごとの運動方程式はそれぞれ単振動となる：

$$x(t) = A_x \sin(\omega t), \qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \phi)$$

振幅A_x, A_yと位相差ϕがどのような関係にあれば，点(x, y)が半径Rの円 $x^2 + y^2 = R^2$ の上を運動するか．

Q6

(1)　振動をする物体の位置から速度と加速度を微分法で導け．加速度から速度と位置を積分法を用いて導け．

(2) フックの法則に従うバネがある．

・このバネに 10 kg の物体をとりつけて垂直に吊すと，1cm だけ伸びて静止した．バネ定数はどれだけか．
　重力加速度を$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$とする．

・この物体をわずかに引っ張り静かに放すと単振動を起こした．振動数および角振動数の値を計算せよ．

Q7

x 軸上で原点を中心として単振動をする物体がある．物体の位置を $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$と書く．周期は 1 秒．ある時刻にこの物体の位置と速度を測定したところx_0 =2.0 m,　$v_0 = -3.0$ m/s であった:

(1) A とθの値を求め，この物体の運動をあらわす t-x 図と t-v 図を重ねて描け．

(2) 物体がこのあと初めて原点を通過するまでの時間はどれだけか．

Q8

フックの法則に従うバネ（バネ定数 $k = 1$N/m）の一端に質量 $m = 3$ kgの物体をとりつけ，他端を固定して水平面内で単振動させる．

(1) 物体の力学的エネルギーが保存されE =1J のとき，この物体の最大の速さVはどれだけか．振幅Aはどれだけか．

(2) 物体の位置が振幅の半分のときの速さvはどれだけか

Q9

(A)　バネでおもりを鉛直に吊るし，鉛直下向きに x 軸をとる．

　(1) バネが自然長のときのおもりの位置を原点として運動方程式を記せ．

　(2) おもりが静止する位置を原点として運動方程式を記せ．

(B*)　ひげゼンマイによって生じるトルク　τ　と　回転角　θ　が比例することから，慣性能率Iのテンプの振動数を求める．以下の問に答えよ．

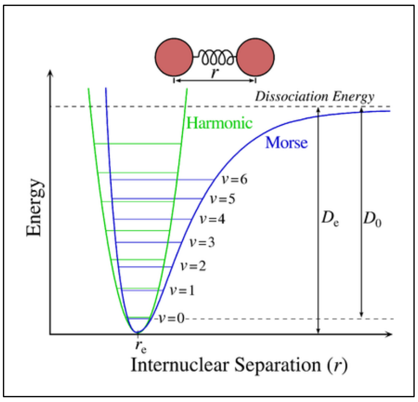
（*この問は，解答を解説として吟味すれば十分である．本問の目的は慣性能率に親しみ回転運動に対する単振動という視点を持てるようにすることである）

　(1) 一様な密度ρ, 厚さhの半径Rの円板が，その中心を貫く軸の周りに回転するときの慣性能率Iを計算せよ．

　(2) 円板の外周に取り付けたバネ（ひげゼンマイ）が，円板の接線方向に力を及し，円板に微小な振動を起こす．バネ定数をkとする．円板の回転角θについて運動方程式を求め，振動の角振動数を定めよ．

Q10（＊）

本問は，分子振動を題材としたが，フックの法則に従わない現実のバネの取り扱いを目的とする．微小な振動であれば近似的にフックの法則が成り立つとして，単振動モデルを適用する例である．解答は解説と考え読んで理解できれば十分である．



2 原子分子の核間距離rとエネルギーの関係を

$$V(r) = D_e\left(1 - e^{\alpha\cdot(r - r_e)}\right)^2$$

とする（Morse potential）．平衡点($r = r_e$）を中止とした微小な振動は単振

動と考えてよい．
(1) 微小振動のバネ定数をD_eとαで書け．
(2) 酸素や窒素のように２つの原子核が同じ質量mを持つ分子では，微小振動の角振動数はどのように表されるか．

Q11
軽い糸で天井に結ばれたおもりの運動の振動数を求める手順を解説せよ．

解答・解説

A1
たとえば
・床面にぶつかって跳ね返る運動を繰り返すボール
　ボールの鉛直方向の座標が振動する
　横軸時間，縦軸鉛直方向の座標とすると，上に凸の放物線を切り取った形のグラフが１周期となる．
　ただし時間とともに減衰する
・除夜の鐘の音
　音の強さが振動する
　急峻な立ち上がりと，それに引き続く減衰波形で１つの周期となる．
　ただし 108 回周期目で終わる
・潮位
　水面の高さが振動する
　１日２回，太陽と月と地球の位置関係により異なるパターンになる

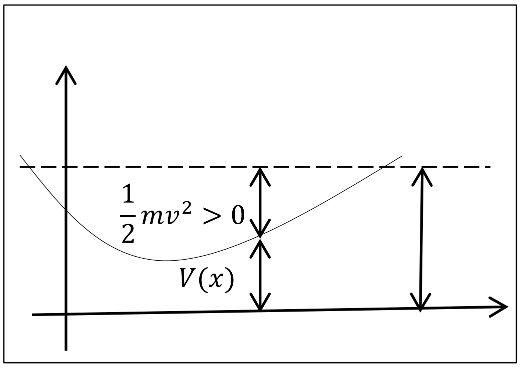
A2
(1)
左：バネの復元力，床面からの力（垂直抗力と摩擦力），空気からの浮力と抵抗，地球が引く力（重力），（他の天体からの力・・・
中：糸の張力，重力，空気からの浮力と抵抗，
右：球面から受ける力（垂直抗力と摩擦力），重力，空気からの浮力と摩擦力

(2) 力学的エネルギーの保存則とは，
物体に加わる力が，物体の位置の関数として決まり（時刻や物体の速度・加速度によらない），さらにその力がする仕事が移動の始点と終点だけにより決まるとき，この力を保存力という．
　保存力に抗して物体を２点間で移動するときに必要なエネルギーが，２点間の位置エネルギーの差である．
　物体を質量mの質点とし，速度の大きさをvとすると，その運動エネルギーは $\frac{m}{2}v^2$である．
　保存力による運動では，どんなときにも
　　　　力学的エネルギー＝運動エネルギー＋位置エネルギー＝一定
となる．この等式を力学的エネルギー保存則という．

位置エネルギーは，その保存力がなす仕事（保存力×移動距離）の符号を反転したものだから，位置エネルギーの傾斜の符号を反転すると，その力が得られる．従って，物体の位置xの関数として表した位置エネルギー$V(x)$の

グラフの傾斜から，物体に加わる力を読み取ることができる．たとえば，$\frac{d}{dx}V(x) = 0$の位置は，物体に力が作用しない平衡点である．

$V(x)$のグラフに, 力学的エネルギーが一定であることを表す水平線を重ねて描く. $V(x)$が水平線より上側の領域では$\frac{1}{2}mv^2 < 0$となるので, 物体がこの領域で運動することはない. $V(x)$が水平線より下側の領域では，$\frac{1}{2}mv^2 > 0$であり，運動が実現する．さらに，$V(x)$の値が小さいほど$\frac{1}{2}mv^2$が大きく，速さも大きい．安定平衡点では$V(x)$のグラフは下に凸の曲線なので, 安定平衡点で最速となりその両側で遅くなる. このことは，安定平衡点の両側で力（したがって加速度）が平衡点を向くということと同じ内容である. 水平線と$V(x)$のグラフが交わる点では速度が 0 となり, 速度の方向が逆転してもとに戻っていく転回点である．



A3

(1)

振幅 A：振動する量の中央位置と端の間の大きさ

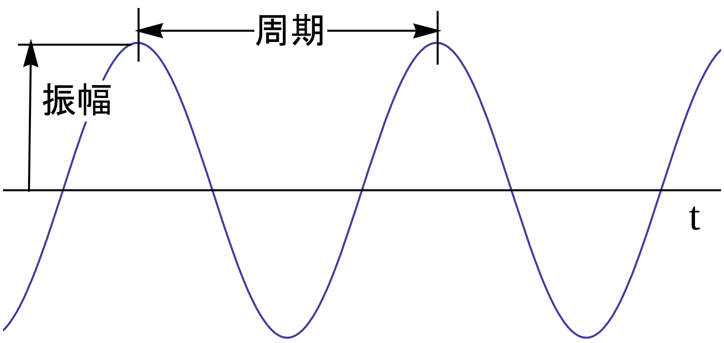
振動数 ν： 1 秒間に往復する回数

角振動数 ω：振動数の２π倍，１回の往復を角度 2πの変化と読む.

周期 T： 1 往復に要する時間

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

(2)



A4

(1) 題意の単振動を式で表すと

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

である．運動方程式は加速度と力の関係を記述するので，２回微分して加速度を求めると

$$x'' = a(t) = -A\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

よって運動方程式は，物体の質量をmとすると

$$m\,a = F = -m\,\omega^2 x$$

である．

(2) 符号
変位x：x軸の正の方向の変位が正
時間： 時間が経過する方向が正

速度$\frac{dx}{dt}$:dx と dt の符号が同じとき正. 通常は正の時間 dt が経過する間に起きた変位 dx について計算するので,

変位が正のとき速度が正． したがって，x 軸正方向に運動する物体の速度が正.

加速度$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$：正の速度がさらに増加するとき正，負の速度が減少するとき正.

質量：正のみ
（参考）
角度の変化：観測者から見て反時計回りが正
角速度：振動運動を回転運動の射影とみたとき，反時計回りの回転が正.

A5

(1) 加速度の大きさaと半径R，角速度ωの間には$a=R\omega^2$の関係がある．加速度ベクトルと，中心からの位置ベクトルが，平行逆向き．したがって，円の中心を原点とすると $\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-R\omega^2\frac{\vec{r}}{r}=-\omega^2\vec{r}$, $|\vec{r}|=R$． 動方程式は

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-m\omega^2\,\vec{r}$$

となる.
(2) $\vec{r}=\big(x(t),y(t)\big)$とすると

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m\omega^2x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-m\omega^2y$$

(3) $x(t)=A_x\sin(\omega t)$，$y(t)=A_y\sin(\omega t+\phi)$
円運動ならば，y 軸方向から見たときの振幅A_xと，x軸方向から見たときの振幅A_yが等しく，半径Rに一致する：$A_x=A_y=R$． また円運動では，y 軸方向から見て最大変位していれば x 軸方向から見ると原点にある：

$$\phi=\frac{\pi}{2}\rightarrow\ y(t)=R\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=R\cos\omega t$$

よって

$$A_x=A_y=R,\qquad \phi=\frac{\pi}{2}\left(\text{あるいは}\frac{-\pi}{2}\right)$$

A6

(1) $x(t)=A\sin(\omega t)$から出発して微分法により

$$x(t)=A\sin(\omega t)\rightarrow\quad v(t)=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t)\rightarrow\ a(t)=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin(\omega t)$$

$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ から出発しても同様に

$$x(t)=A\sin\big(\omega t+\varphi\big)\rightarrow\quad v(t)=\frac{dx}{dt}=A\,\omega\cos(\omega t+\varphi)\quad\rightarrow a(t)=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$$

$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$ から出発して積分法により

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt = v(0) + A\,\omega\cos(\omega t) - A\,\omega$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t) - A\omega t$$

$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$から出発しても同様に

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt = v(0) + A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\,\omega\cos(\varphi)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t + \varphi) - A\,\omega\cos(\varphi)\,t - A\sin(\varphi)$$

積分定数を初期条件によって定めることに注意せよ.

(2)

$$F = mg = 10\ \mathrm{kg} \times \frac{9.8\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 98\ \mathrm{N} \rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = 98\frac{\mathrm{N}}{0.01\ \mathrm{m}} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{N/m}$$

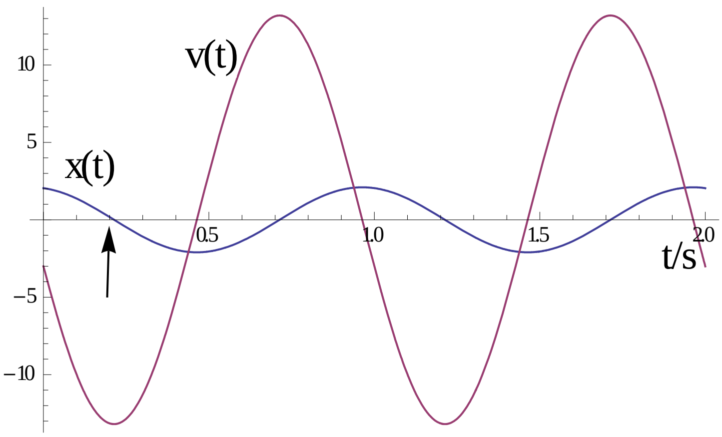
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{9.8 \times 10^2\ /\mathrm{s}^2} = \frac{31\ \mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5.0\ \mathrm{Hz}$$

A7

(1)

$$\mathbf{A} = \sqrt{\boldsymbol{x_0^2} + \left(\frac{\boldsymbol{v_0}}{\boldsymbol{\omega}}\right)^2} = \sqrt{\boldsymbol{x_0^2} + \left(\frac{\boldsymbol{v_0}}{\boldsymbol{2\pi}}\boldsymbol{T}\right)^2} = \sqrt{(\mathbf{2.0})^2 + \left(\frac{\mathbf{-3.0}}{\mathbf{6.28}}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{4.23}} = \mathbf{2.1\ m}$$

$$\theta = \arctan\left[-\frac{-3.0}{2\pi\ (2.0)}\right] = \arctan\left[\frac{3}{4\pi}\right] \simeq 0.23\ \mathrm{rad}$$



(2)

$x_0 = \mathrm{A}\cos(\omega t + \theta) = 0$ となる最初の時刻は　$\omega t + \theta = \frac{\pi}{2}$　より

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\omega} = \frac{3.14 - 0.23}{6.28} = 0.21\ \mathrm{s}$$

A8

(1) 最大速度Vは原点を通過するときの速さで，このときの変位が0だから　$\frac{m}{2}V^2 = E$　より

$$V = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{2\times\frac{1\ \mathrm{J}}{3\ \mathrm{kg}}} = 0.82\ \mathrm{m/s}$$

振幅Aは最大変位の位置に等しく，このときの速度が0だから　$\frac{k}{2}A^2 = E$　より

$$A = \sqrt{2\times\frac{1\ \mathrm{J}}{1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1.4\ \mathrm{m}$$

(2) $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = E = \frac{1}{2}kA^2 \ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mA^2 = \frac{3}{4}E = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mV^2 \ \rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}\times V^2}$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\ \mathrm{m/s} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \mathrm{m/s} = 0.71\ \mathrm{m/s}$$

A9

(A)

(1) 自然長を原点とする運動方程式は, 座標を鉛直下向きとする(重力が正方向)ので

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$

(2) つり合いを保ち静止状態を続けるときは，左辺の加速度も0となる．
つり合いの位置を　x_0　とすると

$$0 = -kx_0 + mg \ \rightarrow \ x_0 = \frac{mg}{k}$$

x_0を新しい原点とする新しい座標系における位置座標 X は（おもりの位置は同じだが座標原点が下がったので）

$$X = x - x_0 \qquad \rightarrow \quad x = X + x_0$$

となるから，もとの運動方程式にこれを代入し，Xについての式をつくると

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -k\left(X + x_0\right) + mg = -kX \qquad \rightarrow \quad m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX$$

ただし，　x_0　が時間的に変化しないので2回微分も0となること，また，つり合い位置$x_0 = \frac{mg}{k}$を用いた．最後の式から，Xが単振動することがわかる．バネでおもりを吊り下げると，つりあいの位置を中心とした単振動をする．その角振動数は，同じバネとおもりを水平な床面で振動させたときの周期と同じ値$\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m}}$である．

(B)

(1)

【慣性能率（慣性モーメント）の定義と利用】

・　回転中心から距離 r のところに質量　m　の質点がある

　・・　慣性能率は$I = mr^2$である．

　・・　この質点が角速度ωで回転するとき，

　　・・・　角運動量は　$I\omega = mr^2\omega$,

　　・・・　運動エネルギーは$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

・　以上の内容を納得するための確認事項

・・　角運動量：$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$，$\vec{r}$と$\vec{v}$が直交するとき$|\vec{\ell}| = r \cdot m(r\omega)$，

・・　運動エネルギー：$\left(\frac{1}{2}\right) mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right) m\,(r\omega)^2$

【円板の慣性能率】

・　考え方

・・　回転中心から距離r_1に質点m_1，距離r^2に質点m_1があり，ともにωで回転する

・・　全体の慣性能率は$I_1 + I_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

・　どんな物体も，剛体ならば，その全体が同じ軸のまわりに同じ角速度で回転する

・・　全体を細分して，各部分の慣性能率を求め，

・・　それらを寄せ集めれば全体の慣性能率が求まる.

・　**計算の手順**

・・直径Rの円板を「細い同心のリング」に分割し，細いリングの軸の回りの慣性能率を求める.

・・細いリングの慣性能率は，リングを細分化してできる微小部分の慣性能率を求め，それらの和をとる.

・・　細いリングの内径をr，外径を $r + dr$ とする．リングをN個に分割すると，

・・・　微小部分の

・・・・　質量は$dm = \rho \times 2\pi r \times dr \times h \div N$

・・・・　慣性能率は　$dI = dm \times r^2 = 2\pi \left(\frac{\rho h}{N}\right) r^3\,dr$

・・・　リング全体の慣性能率は　$N\,dI = 2\pi\rho\,h\,r^3\,dr$

・・　細いリングは，半径が$r = 0 \sim R$ で無数にある．それらを全部集めると円板の慣性能率　I　となる

$$I = \int_0^R 2\pi\rho\,h\,r^3\,dr = 2\pi\rho h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2}\pi\rho h\,R^4 \quad = \frac{1}{2}\left(\pi R^2\,h\,\rho\right) R^2 = \frac{1}{2} M\,R^2$$

ただし，Mは円板の質量.

・・　慣性能率　I　の物体がトルク　τ　(タウ)　を受けて運動するとき，

回転角θについての運動方程式（角運動量の時間的変化の割合 ＝ トルク）は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

である.

・この問の条件下で，

$$\tau = R \times 力 = R \times (-k\,R\theta) = -k\,R^2\,\theta$$

となるから

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} M\,R^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\,R^2\,\theta \quad \rightarrow \frac{1}{2} M \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2k}{M}\theta$$

回転角 θ が単振動し，その角振動数は

$$\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

となる.

A10

分子を構成する原子の結合エネルギー（分子がバラバラの原子に分解したとき放出するエネルギー）は，原子間距rにより変化し（その距離からバラバラになるときに放出するエネルギーが，距離により異なる），安定平衡の距離r_eで最小となる．

結合エネルギーの関数形$V(r)$は，いろいろなモデルがあるが，

$$V(r) = D_e \left(1 - e^{\alpha\cdot(r - r_e)}\right)^2$$

すなわちモース・ポテンシャルと呼ぶ関数が頻繁に用いられる．

(1)原子の振動の振幅が小さいとき，すなわち$\alpha \times (r - r_e)$が非常に小さいとき，$V(r)$の近似的な関数形を求める．それには，まずテーラー展開により指数関数を近似し

$$e^{\alpha(r - r_e)} \simeq 1 + \alpha(r - r_e)$$

となることを用い

$$V(r) \simeq D_e\,\alpha^2\,(r - r_e)^2 = \frac{1}{2}(2\,D_e\,\alpha^2)(r - r_e)^2$$

とする．$(r - r_e)$は「バネの自然長からの変化」に相当するので

$2\,D_e\,\alpha^2$がバネ定数に相当

する．

(2) バネ定数$(2\,D_e\,\alpha^2)$のバネの両端に質量mのおもり（原子）が結ばれている．バネは，その中央を中心として対称に伸縮するから，<u>中央を固定端と考え，半分の長さのバネの片端に質量</u>mがあるとしても同じである．

バネの長さが半分になると，バネ定数は倍になるので

$$k = 2 \times (2\,\mathrm{D_e}\,\alpha^2)$$

というバネに質量mをつないだときの単振動が起きる．その角振動数は

$$\omega = \sqrt{4D_e\frac{\alpha^2}{m}} = 2\,\alpha\sqrt{\frac{D_e}{m}}$$

となる．

A11

パワーポイントの前ページと同じ内容を採録

天井から長さℓの軽い糸で質量mのおもりを吊り下げて振り子にすると，振幅が小さいときは単振動する．

天井の固定点を中心にして，おもりの回転運動に注目する．

おもりの慣性能率：$I = m\ell^2$

おもりに加わる力のうち

・糸の張力によるトルク：0　(回転中心に向かう力だから)

・重力によるトルク：$\tau = -mg\,\ell\sin\theta$　(回転角が増える向きと逆向き、角度により異なる大きさ)

回転運動の運動方程式は一般的に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\text{角運動量}) = \text{トルク}$$

と書ける。慣性能率を用いて角運動量を書くと

$$角運動量 = I\omega = I\frac{d\theta}{dt}$$

である。したがって運動方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = \tau$$

となる．運動方程式を問に即して書き直すと

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\ell \times (mg\sin\theta)$$

この式を整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

となる。

振幅が小さい（したがって回転角が小さい）とき、ラジアンで表示した角度θを用いると

$$\sin\theta \simeq \theta, \quad |\theta| \ll 1$$

このとき運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

となる.

重力で運動する振り子は、回転角小さいとき，回転角が単振動する。その角振動数は$\sqrt{\frac{g}{\ell}}$となる.

床面に映るおもりの影の位置xは，回転角が小さいなら$x \simeq \ell\theta$となるので、影の位置も同じ角振動数で単振動する.