2 さまざまな波

波がさまざまな場面で観察されることはすでに学んだが，波についての基礎的な理解を確認しておく．
波は何かを伝わっていくものだが，その「何か」を媒質と呼ぶ．

水波の媒質は水，音波の媒質は空気（固体や液体を伝わる音波なら，その固体や液体），地震波は大地が媒質である．

波を数学的に記述するとき，「媒質中のどこで，いつ，何がどれだけ変化しているか」を関数 $f(x,t)$として表す．

関数 $f(x,t)$の値は，波の量だが，「媒質中の一点が，その平衡位置からどれだけずれたか」を表す．
ずれの量としては，距離や圧力，密度など，さまざまな場合がある．

「波が伝わる」とき，波という実体があって，それが移動していく」ように見えるかもしれない．
しかし，媒質が移動していくことはない．たとえば，水波の波紋が拡がっていくときにも，水面に浮かぶボートは揺れているだけである．

一点でみると，波の動きは振動運動である．波が伝わるとき，振動運動が伝わっていく．
振動のエネルギーは，媒質を通して伝わっていく．

光あるいは電磁波は，何もない空間を伝わる．物質を伝わる波ではない．媒質は空間そのものである．
振動する量は，電場や磁場である．

3. 問 1

(1) 左図(a)：波が伝わる方向と直交する方向への，バネのずれ， 左図(b)： 波が伝わる方向への平衡位置からのずれ，あるいはバネの密度.

中図：水面の上下方向への（波がないときの位置からの）変位

右図： 格子点の平衡位置からのずれ.

(2)ランダムな動きがあるときは平均の平衡位置からのずれが波となる量である.

参考：

波を扱うとき，媒質を構成する原子や分子のことを全く考えず，媒質が連続であるというモデルを使う.

だが，物質が原子や分子から成ることを前面に押し出したとき，波が伝わる速さが何で決まるかを論じることもできる．考察の過程はつぎのようになるだろう

・ 音の波は空気の密度の波であり，密度が高い（あるいは低い）部分が移動する速さが音の速さ.

・ ある位置で密度が階段状に変化するとしよう．この階段が移動するとき，実は，空気を構成する分子が移動する．したがって分子が自由に移動する速さが音の速さ．「自由に移動」：分子どうしは互いに頻繁に衝突をくりかえすが，衝突と衝突の間は「自由に移動」する.

4 横波と縦波

波の種類として，横波と縦波があることを既に学んだ．ここで復習しよう．

波の量が，たとえば「媒質の各点の平衡位置からのずれ」のとき，ずれは向きと大きさをもつベクトルである．

- 横波は，波が伝わる方向と，ずれの向きが直交．
- 縦波は，波が伝わる方向と，ずれの向きが平行．

気体や液体を伝わる音波は縦波だが，固体を伝わる音波は縦波と横波がある．

- 気体や液体は，圧縮や膨張するともとに戻ろうとする復元力が働き，振動が起きて縦波が伝わるが横にずらしても元にもどろうとする力は発生しないので横波は起きない．
- 固体でも，圧縮や膨張にともなう復元力が働くから縦波が伝わるが，それだけでなく横にずれても元にもどろうとするので，横波も発生する．
- 同じ固体であっても，圧縮膨張に対する復元力と，ずれに対する復元力は異なるので縦波と横波の速度が異なる．

真空中を伝わる電磁波は横波だけである．

電場の縦波があるとすると，そこには電荷が存在しなければならず，真空であることと矛盾する．

水波（水の表面の波）は，表面の位置が回転運動をするので，縦波や横波という分類からはずれる．

5. 問 2

(1) 縦波とは，波の進行方向と媒質の振動の向きが平行な波．例：気体や液体中の音波．
横波とは，波の進行方向と媒質の振動の向きが直交する波．固体中の音波には横波もある．地震波にも横波がある．真空中の電磁波は横波．

(2) 波面： 波の進行方向に垂直な平面．
電場ベクトル：１つの波面上ではどこでも同じ方向，同じ向き．異なる波面上では電場の位相が異なる．

(3) 震源の真上だから，縦揺れは縦波の振動，横揺れは横波の振動を意味する．震源と観測点の間が固体であれば，縦波と横波の両方が伝わり，地震で先に縦揺れが来るのなら，地震では横波より縦波のほうが速く伝わる．

6. 周期的な波

波の形には様々なパターンがある.
ピストルの発射音のように，非常に短い時間だけ続くパルス波形の波もある.
また，音叉から出る単一の振動数の波は，ずっと長い時間同じ波形が続く.
ここでは後者のような「周期的な波」に注目する.
どんな波形であっても，さまざまな振動数の周期的な波を適切な位相と振幅で重ね合わせて作りだすことができる（フーリエ級数，フーリエ変換）.
したがって，単一の振動数の周期的な波であるサイン波の性質を熟知すれば，どんな波形の波にも対応することができる.
媒質（たとえば弦）をサイン波が伝わるとき，
１）　媒質中の一点で，媒質の運動を観察すると単振動となる．単振動を記述する量（振幅，振動数，位相）がサイン波でも重要となる.
２）　ある瞬間に波の全体を写真に撮り観察すると，横軸を位置座標としたサイン波形が現れる．波長＝空間的な周期，そして波が空間を伝わる速さが重要な量と成る.

7. サイン波 (グラフが表すもの)

波の形（波形という）がサイン関数で表される波をサイン波という.

サイン波を媒質中の１点で観測すると，媒質の平衡位置からのずれが単振動を示す（時間を変数とするサイン関数）.

ある時刻において，媒質のずれを全域で観察すると，座標を変数とするサイン関数で表される.

横軸が座標のときのサイン関数を（時間的な）サイン波形という．一方，

横軸が時間のときのサイン関数を（空間的な）サイン波形ということもある.

[重要]　横軸が「x 軸」，縦軸が「媒質の平衡位置からのずれ」を表すグラフが意味するもの

・ 1 次元の横波（ロープや弦巻バネを伝わる横波）

　・・　ロープなどの張られた方向が　x　軸

　・・　ロープなどの平衡位置からのずれの様子が，そのままグラフになる

・ 3 次元空間の横波（固体を伝わる音波，電磁波）

　・・　x 軸方向に伝わる平面波に限られる（yz 面内で変化し無いとしているから）

　・・　媒質に波がないとき，媒質に目印の線を x 軸と平行に何本も描く．波があると，これらの全ての線がグラフの形になる.

　・・　x 軸と直交する面内での電場ベクトルの大きさと正負を示す.

・　縦波（弦巻バネの縦波，３次元空間の媒質を伝わる音波）

　・・　媒質の平衡位置からのずれを縦軸にとるとき，グラフの値が 0 の位置では密度が最大あるいは最小となる

　・・　媒質の密度を縦軸にとるとき，グラフの値が 0 の位置では平衡位置からのずれが正あるいは負の最大となる

　・・　媒質に目印をつけても，サインカーブが見えることはない

8 問 3

(1) 同じ波面（縦線）内の矢印が横波による媒質の変位の大きさと向きを示す．ひとつの波面内のどの位置でも同じ向きに同じ大きさだけ，一斉に変位するので，密度は変化しない．また，波の進行方向には変位しないので密度は変化しない．横波では密度が変化しない．しかし媒質は「ずれ」を経験する．

(2) 中段のグラフは，マッチ棒の頭の変位を示す．右（左）に変位したとき正（負）としている．

下段のグラフは密度を示す. ある点の左側の変位が正で右側の変位が負のとき(言い換えると, 変位が 0 のとき), マッチの頭は両側から寄ってくるので密度が最大.　左側の変位が負で右側の変位が正のとき（これも変位が 0 のとき）密度が最小である．在る点の変位が最大（最小）のとき，その直ぐ左右の位置の変位は同じ値になり，密度は波が無いときと同じ, すなわち密度が 0 である. 変位のグラフと密度のグラフは位相が 90 度ずれている.

9　サイン波(進行波と位相速度)

ここで

$$f\,(x,\,t)\;=\;A\,cos(k\,x - \omega t)$$

という波に注目する．ある位置，たとえば $x\;=\;0$ では

$$f\,(0,\,t)\;=\;A\;\;cos(-\omega t) = \;A\,cos(\omega\;\boldsymbol{t}\,)$$

であり，確かに単振動する波である．

また，ある時刻たとえば $t\;=\;0$　では

$$f(x,\,t)\;=\;A\,cos(k\,x)$$

であり，（コ）サイン波形となる．　こうして，この波はサイン波である．

波長をλとすると

$$f\,(x,t) = \;A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

となるはずだから

$$k\;=\frac{2\pi}{\lambda}$$

である．

k から2πを除外した$\frac{1}{\lambda}$という量は，単位長さに何個の波（1 個の波＝1 波長分の波）が入るかを示し「**波数**（はすう）」という．

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ で 2π*倍したのは*，1 波長進むと波の位相が 2π 変わることを表現している．

すなわち，コサインの中で距離 λ だけ進むと位相が 2π 進む

ことに対応している．$k = \frac{2\pi}{\lambda}$も**波数**という．

===

$f\,(x,\,t)\;=\;A\,cos(k\,x - \omega t)$　は，振幅 A，波数 k，角振動数ω　のサイン波である．

==

波の動きを見るとき，たとえば，ある山の位置に注目して，これがどんな速さで移動するかを観測する．

山の位置は「位相がこれこれのところ」と言い換えられるから，この方法で見る波の速さを「位相速度」という．

具体的には

$$cos(k\,x - \omega t)$$

の位相が一定すなわち

$$kx - \omega t\;=\;\textit{一定}$$

を満たすxの位置が，たとえば山の位置であれば

$$kx - \omega t\;=\;0$$

である．この関係を満たす x は　時間とともに変化し

$$x\;=\frac{\omega}{k}t$$

すなわち，速さ

$$c\;=\frac{\omega}{k}$$

でx 軸　正方向に移動する．

x軸 負方向に同じ速さで移動する波は

$$A\,cos(k\,x\;+\omega t)$$

となる．

10 問 4

(1)　(i) 波長：　$\lambda = \frac{2\pi}{50} = \frac{4\times 3.14}{100} = 0.12$ m,　1m に含まれる波の数 $\frac{1}{\lambda} = 8.3$/m,

(ii)　$c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{2\pi}{50} \times 3000 = 60 \times 6.28 = 3.8 \times 10^2$ m/s,

(iii)　$\Delta\phi = k\Delta x = 50 \times 0.01 = 0.5$ rad　→　$\frac{0.5}{\pi} \times 180$ 度 $= 29$ 度

(2) $f(x, t_0) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t_0) = A\sin kx = A\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \to \omega t_0 = \frac{\pi}{2} \to t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4}$

(3) $\Delta\phi = -\frac{\omega \mathrm{T}}{2} = -\pi$, 時間経過によって位相が減った分だけ，位置座標が増えて，位相の変化を相殺する：$k\Delta x = +\pi \to \Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{2}$　よって半波長だけ正方向に移動する．

(4) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$；　$f(0,0) = A\cos\varphi = 0$,　$f\left(\frac{\lambda}{4}, 0\right) = \mathrm{A}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} + \varphi\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -A\sin\varphi = A$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},\quad f(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(kx - \omega t)$$

11　サイン波 (波動方程式)

サイン波だけが波ではない．では，どのような性質をもつものが波なのか？

ひとつの答えは「波動方程式の解が波」である．

波動方程式を読む

- 座標についての二回微分（波形の曲がり方）と，時間についての二回微分（加速度）が比例する・
- 比例係数が位相速度の 2 乗
- 例：　サイン波の山のピークの位置は曲がり方が最大となり，その位置は最大の加速度で動く（山のピークの位置は，受ける復元力が最大である）

波動方程式の包容力

同じ速さの，左に進むサイン波と右に進むサイン波は，同じ波動方程式を満たす．

サイン波に限らず，パルスであっても，波形を変えずに一定の速さで移動する波は波動方程式を満たす．

波動方程式の線型性

$g(x,t)$　と　$h(x,t)$ が，ある波動方程式を満たすとき，　$f(x,t) = a\,g(x,t) + b\,h(x,t)$ も波動方程式を満たす．

これは，ある波形 f の 振幅が「すでに波として伝わる ことが分かっている g と h の振幅の和」となるときは，

f も波としてその媒質を伝わることを示す．

- 波の干渉が起きるのは，波動方程式の線型性による．
- さまざまな振幅，振動数，位相のサイン波を重ね合わせて出来る新しい波形も，その媒質を伝わる波である．
- たがいに逆向きの進行波を重ねてつくった定在波は，進まないようにみえるが，波である．

波動方程式は，媒質が波を伝えることのできる性質を表現している．

位相速度 c は媒質の性質によって決まる．

- ここに示した波動方程式では　c　は一定
- 現実の媒質では，c が波の振動数や振幅によって変化する場合がある．

12 問　５

(１) x 軸正方向に進む波は$A\cos(kx-\omega t)$と書けるので，空間および時間に関する 2 階偏導関数を計算すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\left(k\,x\,-\,\omega t\right) = -\,k^2\cos\left(k\,x\,-\,\omega t\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\,(k\,x\,-\,\omega t)\;=\;-\,\omega^2\cos\,(k\,x\,-\,\omega t)$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\left(k\,x\,-\,\omega t\right)-\left(\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\;\cos\left(k\,x\,-\,\omega t\right)\;=\;0$$

となる．$c=\frac{\omega}{k}$とおくと，$A\cos(kx-\omega t)$は伝播速度がcの波動方程式を満たすことがわかる.

同様に，負方向に進む波は$A\cos(kx+\omega t)$であるから，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(k\,x\,+\,\omega t) = -\,k^2\cos(k\,x\,+\,\omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\,(k\,x\,+\,\omega t)\;=\;-\,\omega^2\cos\,(k\,x\,+\,\omega t)$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\left(k\,x\,+\,\omega t\right)-\left(\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\;\cos\left(k\,x\,+\,\omega t\right)\;=\;0$$

となり，負方向に進む波も，正方向に進波と全く同じ波動方程式を満たすことがわかる.

(2) $g(x,t)=(x-ct)^2$について空間および時間の 2 階導関数を求めると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\,-\,ct\right)^2\;=\;2,\qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(x\,-\,ct\right)^2\;=\;2\,c^2$$

よって

$$f\;=\;\left(x\,-\,ct\right)^2$$

は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\;-\;\left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,f\;=\;0$$

を満たす.

$s\,(x,t) = \left(x\,-\,ct\right)$ とすると$g(s)\;=\;g\left(x-ct\right)$と書ける．左辺は 1 変数関数，右辺は 2 変数関数なので関数の記号を別にすべきかもしれないが，便宜的に同じgを使うのが常識となっている.

まず，$g\left(x-ct\right)$の形の関数が波動方程式を満たすことをしめす.

それには合成関数の偏微分法により

$\frac{\partial}{\partial x}g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right)\frac{\partial s}{\partial x},\qquad \frac{\partial s}{\partial x} = 1$となるので

$$\frac{\partial s}{\partial x}\;g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right)\cdots\text{右辺は s だけの関数}$$

$\left(\frac{dg}{ds}\right)$が$s$だけの関数であることに注意してもう一度微分する：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(s) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{ds}\right)\;=\;\left(\frac{d^2g}{ds^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\;s\right) = \frac{d^2g}{ds^2}$$

つぎに t についての微分を行うと

$$\frac{\partial}{\partial t} g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} s\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} s = -c$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(s) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{dg}{ds}\right)(-c)\right] = (-c)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dg}{ds}\right) = (-c)^2\left(\frac{d^2 g}{ds^2}\right) = c^2 \frac{d^2 g}{ds^2}$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g - \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} g = 0$$

が成り立つ．サイン関数だけでなく，$g\left(x - ct\right)$の形なら波動関数の解となる．$g\left(x - ct\right)$は，$t = 0$におけるグラフの形$g(x)$が速さ c で正方向に移動する様子を表す．

つぎに，c → $-c$とすると$\frac{1}{(-c)^2} = \frac{1}{c^2}$となる．$g(x + ct)$ も同じ波動方程式を満たすことが直ちに分かる．

(3) 波動方程式が線型であるとは

「gとhがある波動方程式を満たすとき$a\,g + b\,h$もその波動方程式を満たす(a, bは定数)」ことである．
微分演算が線型の演算なので自明だが実際に計算してみよう．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = a\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) + b\frac{\partial}{\partial x} h(x,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[a\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) + b\frac{\partial}{\partial x} h(x,t)\right]$$

$$= a\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) + b\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,t)$$

同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[a\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) + b\frac{\partial}{\partial t} h(x,t)\right] = a\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) + b\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x,t)$$

以上を総合して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right]$$

$$= \left\{a\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) + b\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,t)\right\} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \left\{a\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) + b\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x,t)\right\}$$

$$= a\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t)\right\} + b\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,t) - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x,t)\right\}$$

$$= a \times 0 + b \times 0 = 0$$

すなわち

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) = 0$ かつ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,t) - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x,t) = 0$

ならば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = 0$$

が示された．

波動方程式が線型なので，同じ速さで進み異なる振動数（波長）をもつサイン波を重ね合わせたものも，同じ速さで進む波（波動方程式の解）となる．逆向きに進む波を重ね合わせてつくる定在波も波動方程式の解である．波の干渉によって出来た新しい波形も，おなじ波動方程式を満たす波である．

より複雑な現象を記記述するために，波動方程式に別の項を付け加え非線形になった方程式を考えることもある．

13　波動方程式の線型性

波の重ね合わせ

周期関数はサイン・コサインに分解できる（フーリエ級数））.
ただし，周期関数の周期をTとすると，フーリエ級数に現れるサイン，コサインの周期は $T/2, T/3, T/4 \ldots$
周期的でない関数もサイン・コサインに分解できる（フーリエ変換）.
このときサイン・コサインの周期は連続的に分布する.
どの周期（あるいは振動数）のサイン・コサイン波も同じ位相速度で伝わる媒質では
それらサイン・コサイン波の和ないし積分で表される波形も同じ位相速度で媒質を伝わる波となる.
同じ振動数の波が2次元，3次元空間に拡がって重なると，山と山が強め合い，山と谷が打ち消しあって
新しいパターンを描く．干渉パターンという．２つの平面波がある角度で交差すると，平行な干渉縞ができる.
球面波と平面波が交わると，円形の干渉縞ができる．干渉縞を写真撮影すると波の位相が記録された
ことになるので，波面を再生することができる（ホログラム，立体写真の原理）
２つの波の周波数がわずかに異なるとき，その重ね合わせはうなり（ビート）を生じる.
非常に接近した２つの振動数の差はうなりの振動数の測定から知ることが出来る
同じ振動数の進行波が左右から侵入すると，パターンが移動しない（同じパターンで振動する）定在波となる.
たとえば, 両端を固定した弦では, 定在波が立つが, これは弦を往復する進行波の重ね合わせとして理解できる.