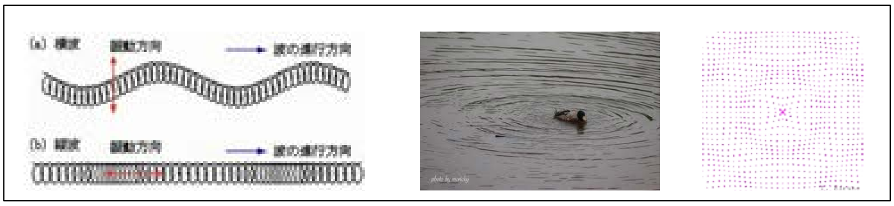
第６回　サイン波

Q1

左図は弦巻バネを伝わる波，中図は水面の波，右図は固体を伝わる音波のイメージ（各点は結晶格子点）である．



(1) それぞれ波となる量は何か.

(2) 下図で格子点が熱エネルギーのためにランダムな運動をするとき，どんな量をつくると波が見えるだろうか.

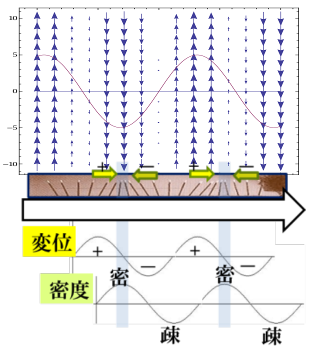
Q2

(1)「縦波」「横波」について説明し，それぞれの波の例をあげよ．

(2)「電磁波の電場が横波で平面波」である．ある時刻の波面（同じ位相で振動する点をつなげた面）の向きと波の進行方向の関係，波面の形，波面内の電場ベクトルの向きと大きさをスケッチせよ．

(3) 地震では先に縦揺れ，あとから横揺れが来る．このことことを，固体中の地震波の縦波と横波という用語を用いて説明せよ．

Q3



(1) 上図は横波を表す．横軸は座標，サイン関数のグラフは各点における媒質の平衡状態からの変位を表し，矢印は同一波面上での変位が同じであることを示す．この図から，横波では媒質の密度が変化しないことを確かめよ

(2) 下図は縦波を表す．横軸は座標．白抜きの矢印は波の進行方向を示す．この矢印の上面に等間隔にマッチ棒を立てたと考えよう．マッチ棒の頭の変位が縦波となる量である．隣の棒の頭が近づく（離れる）とき密度が高い（低い）．

縦波は，媒質の変位の波と，密度の波の位相が異なることを確かめよ．

Q4

(1) 波数$k = 2\pi/\lambda = 50\ \mathrm{m}^{-1}$，振動数$\nu = 3\ \mathrm{kHz}$ のサイン波がx軸方正向に伝わる．

(i) 波長λはどれだけか．1 m に何個の波が含まれるか（波長何個分か）．

(ii) 波の速さcはどれだけか．

(iii)この波をx軸上の 1 cm 離れた 2 点で同時に観測するとき位相差$\Delta\phi$はどれだけか，ラジアンと度で答えよ．

(2) $f(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t)$をある時刻$t_0$（$0 < t_0 < T$：周期）において観測したとき，波形が$f(x,t_0) = \mathrm{A}\sin kx$であった．$t_0$の値を周期$T$を用いて記せ．

(3) $f(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t)$について，時間が半周期$\left(=\frac{1}{2}T\right)$だけ経過すると，ある位置$x$における位相はどれだけ変わるか．この間に波は（波のある特定の位相の点は）どれだけの距離を移動したか．

(4) 初期位相が 0 でないとき，$f(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx - \omega t + \varphi)$となる．時刻 0 に，座標原点で変位が 0 かつ$x = \frac{\lambda}{4}$で変位がAのとき，位相$\varphi$を定めよ（$-\pi < \varphi \le \pi$）．この波をサイン関数を用いて書け．

Q5.

(1) どちらの向きに進むサイン波も波動方程式の解となることを確かめよ．

(2) 関数$g(x,t) = (x - ct)^2$ が波動方程式の解であることを確認せよ．

一般に$g(x \pm ct)$すなわち引数が$(x \pm ct)$の「まとまり」となって現れる関数は波動方程式の解であることを確認せよ．

(3) 波動方程式が線形であることを確認せよ．

解答・解説

A1

(1) 左図(a) : 波が伝わる方向と直交する方向への，バネのずれ， 左図(b) : 波が伝わる方向への平衡位置からのずれ，あるいはバネの密度.

中図 : 水面の上下方向への（波がないときの位置からの）変位

右図 : 格子点の平衡位置からのずれ.

(2)ランダムな動きがあるときは平均の平衡位置からのずれが波となる量である.

参考 :

波を扱うとき，媒質を構成する原子や分子のことを全く考えず，媒質が連続であるというモデルを使う.

だが，物質が原子や分子から成ることを前面に押し出したとき，波が伝わる速さが何で決まるかを論じることもできる. 考察の過程はつぎのようになるだろう

- 音の波は空気の密度の波であり，密度が高い（あるいは低い）部分が移動する速さが音の速さ.
- ある位置で密度が階段状に変化するとしよう. この階段が移動するとき，実は，空気を構成する分子が移動する. したがって分子が自由に移動する速さが音の速さ.「自由に移動」: 分子どうしは互いに頻繁に衝突をくりかえすが，衝突と衝突の間は「自由に移動」する.

室温・大気圧の空気中で分子の速さは秒速 300m 程度， 1 μ m 程度の距離を衝突なしに移動する.

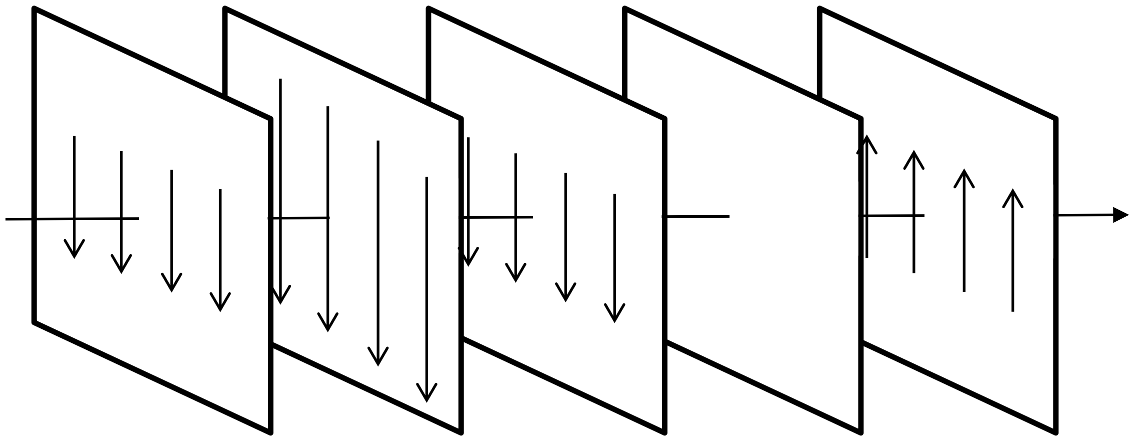
A2.

(1) 縦波とは，波の進行方向と媒質の振動の向きが平行な波. 例 : 気体や液体中の音波.

横波とは，波の進行方向と媒質の振動の向きが直交する波. 固体中の音波には横波もある. 地震波にも横波がある. 真空中の電磁波は横波.

(2) 波面 : 波の進行方向に垂直な平面.

電場ベクトル : 1 つの波面上ではどこでも同じ方向，同じ向き. 異なる波面上では電場の位相が異なる.



(3) 震源の真上だから，縦揺れは縦波の振動，横揺れは横波の振動を意味する. 震源と観測点の間が固体であれば，縦波と横波の両方が伝わり，地震で先に縦揺れが来るのなら，地震では横波より縦波のほうが速く伝わる.

A3.

(1) 同じ波面（縦線）内の矢印が横波による媒質の変位の大きさと向きを示す. ひとつの波面内のどの位置でも同じ向きに同じ大きさだけ，一斉に変位するので，密度は変化しない. また，波の進行方向には変位しないので密度は変化しない. 横波では密度が変化しない. しかし媒質は「ずれ」を経験する.

(2) 中段のグラフは，マッチ棒の頭の変位を示す．右（左）に変位したとき正（負）としている．
下段のグラフは密度を示す. ある点の左側の変位が正で右側の変位が負のとき(言い換えると, 変位が0のとき), マッチの頭は両側から寄ってくるので密度が最大．　左側の変位が負で右側の変位が正のとき（これも変位が 0 のとき）密度が最小である．在る点の変位が最大（最小）のとき，その直ぐ左右の位置の変位は同じ値になり, 密度は波が無いときと同じ, すなわち密度が 0 である. 変位のグラフと密度のグラフは位相が 90 度ずれている.

A4

(1)　(i) 波長： $\lambda = \frac{2\pi}{50} = \frac{4\times 3.14}{100} = 0.12$ m,　1m に含まれる波の数 $\frac{1}{\lambda} = 8.3$/m,

(ii)　$c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{2\pi}{50} \times 3000 = 60 \times 6.28 = 3.8 \times 10^2$ m/s,

(iii)　$\Delta\phi = k\Delta x = 50 \times 0.01 = 0.5$ rad　→ $\frac{0.5}{\pi} \times 180$ 度 $= 29$ 度

(2) $f(x,t_0) = A\cos(kx - \omega t_0) = A\sin kx = A\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \to \omega t_0 = \frac{\pi}{2} \to t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4}$

(3) $\Delta\phi = -\frac{\omega T}{2} = -\pi$, 時間経過によって位相が減った分だけ，位置座標が増えて，位相の変化を相殺する：$k\Delta x = +\pi \to \Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{2}$　よって半波長だけ正方向に移動する.

(4) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$；$f(0,0) = A\cos\varphi = 0$, $f\left(\frac{\lambda}{4}, 0\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} + \varphi\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -A\sin\varphi = A$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},\quad f(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(kx - \omega t)$$

A5.

(１) x 軸正方向に進む波は$A\cos(kx - \omega t)$と書けるので，空間および時間に関する 2 階偏導関数を計算すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(kx - \omega t) = -k^2\cos(kx - \omega t),\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(kx - \omega t) = -\omega^2\cos(kx - \omega t)$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(kx - \omega t) - \left(\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(kx - \omega t) = 0$$

となる．$c = \frac{\omega}{k}$とおくと，$A\cos(kx - \omega t)$は伝播速度がcの波動方程式を満たすことがわかる．
同様に，負方向に進む波は$A\cos(kx + \omega t)$であるから，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(kx + \omega t) = -k^2\cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(kx + \omega t) = -\omega^2\cos(kx + \omega t)$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(kx + \omega t) - \left(\frac{k^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(kx + \omega t) = 0$$

となり，負方向に進む波も，正方向に進波と全く同じ波動方程式を満たすことがわかる．
(2) $g(x,t) = (x - ct)^2$について空間および時間の 2 階導関数を求めると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x - ct)^2 = 2,\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x - ct)^2 = 2c^2$$

よって

$$f = (x - ct)^2$$

は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f - \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0$$

を満たす.

$s(x,t) = (x - ct)$ とすると$g(s) = g(x - ct)$ と書ける．左辺は 1 変数関数，右辺は 2 変数関数なので関数の記号を別にすべきかもしれないが，便宜的に同じgを使うのが常識となっている.
まず，$g(x - ct)$の形の関数が波動方程式を満たすことをしめす.
それには合成関数の偏微分法により

$\frac{\partial}{\partial x} g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right) \frac{\partial s}{\partial x}$，　$\frac{\partial s}{\partial x} = 1$となるので

$$\frac{\partial s}{\partial x} g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right) \cdots \text{右辺は s だけの関数}$$

$\left(\frac{dg}{ds}\right)$がsだけの関数であることに注意してもう一度微分する：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(s) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{ds}\right) = \left(\frac{d^2 g}{ds^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} s\right) = \frac{d^2 g}{ds^2}$$

つぎに t についての微分を行うと

$$\frac{\partial}{\partial t} g(s) = \left(\frac{dg}{ds}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} s\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} s = -c$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(s) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{dg}{ds}\right)(-c)\right] = (-c)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dg}{ds}\right) = (-c)^2\left(\frac{d^2 g}{ds^2}\right) = c^2 \frac{d^2 g}{ds^2}$$

よって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g - \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} g = 0$$

が成り立つ．サイン関数だけでなく，$g(x - ct)$の形なら波動関数の解となる．$g(x - ct)$は，$t = 0$におけるグラフの形$g(x)$が速さ c で正方向に移動する様子を表す.

つぎに，c → $-c$とすると$\frac{1}{(-c)^2} = \frac{1}{c^2}$となる．$g(x + ct)$ も同じ波動方程式を満たすことが直ちに分かる.

(3) 波動方程式が線型であるとは
「gとhがある波動方程式を満たすとき$a\,g + b\,h$もその波動方程式を満たす(a, bは定数)」ことである.
微分演算が線型の演算なので自明だが実際に計算してみよう.

$$\frac{\partial}{\partial x}[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)] = a\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) + b\frac{\partial}{\partial x} h(x,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[a\,g(x,t) + b\,h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[a\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) + b\frac{\partial}{\partial x} h(x,t)\right]$$

$$= a\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) + b\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,t)$$

同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\, g(x,t)\ +\ b\, h(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[a\frac{\partial}{\partial t}g(x,t)\ +\ b\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right]\ =\ a\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,t)\ +\ b\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}h(x,t)$$

以上を総合して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\, g(x,t)\ +\ b\, h(x,t)\right] - \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\, g(x,t)\ +\ b\, h(x,t)\right]$$

$$=\ \left\{a\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\ +\ b\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,t)\right\}\ -\ \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \left\{a\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,t)\ +\ b\frac{\partial^2}{\partial t^2}h(x,t)\right\}$$

$$=\ a\ \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\ -\ \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,t)\right\} +\ b\ \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,t)\ -\ \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}h(x,t)\right\}$$

$$=\ a\ \times 0\ +\ b\ \times 0 = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,t)\ -\ \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,t) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,t)\ -\ \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}h(x,t) = 0$$

ならば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\, g(x,t)\ +\ b\, h(x,t)\right] - \left(\frac{1}{c}\right)^2\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[a\, g(x,t)\ +\ b\, h(x,t)\right] = 0$$

が示された．

波動方程式が線型なので，同じ速さで進み異なる振動数（波長）をもつサイン波を重ね合わせたものも，同じ速さで進む波（波動方程式の解）となる．逆向きに進む波を重ね合わせてつくる定在波も波動方程式の解である．波の干渉によって出来た新しい波形も，おなじ波動方程式を満たす波である．

より複雑な現象を記述するために，波動方程式に別の項を付け加え非線形になった方程式を考えることもある．