

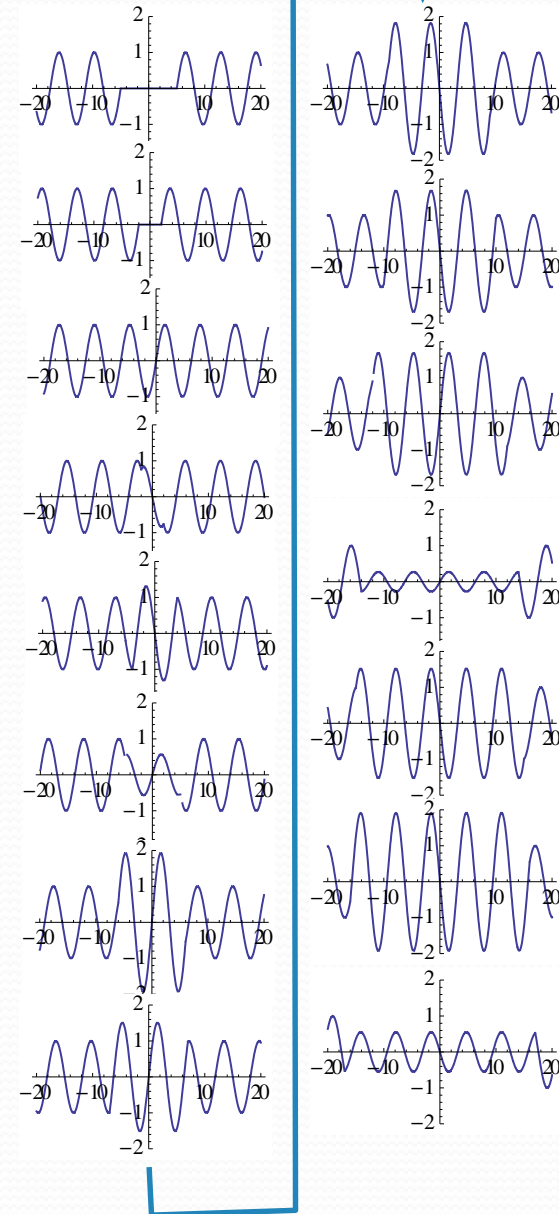
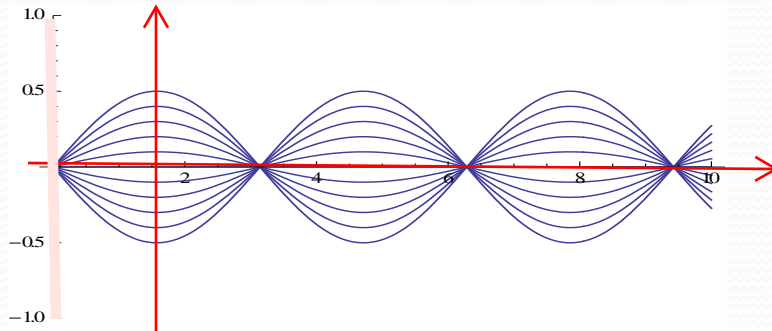
波の干渉

- 進行波と定在波
- さまざまな波形の周期的な波
- うなり
- ホイヘンスの原理
- 回折と干渉

進行波と定在波

(2013 PSL 07 進行波と定在波.nb)

- 逆向きの進行波の重ね合わせ
 - サイン波：振幅，振動数，波長が同じ
$$A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t)$$
$$= 2A \cos kx \times \cos \omega t$$
 - 各位置の振幅をつなげる： $2A \cos kx$
 - どの位置もおなじ位相で振動： $\cos \omega t$
 - 波のパターンは同じ位置に留まる



問1

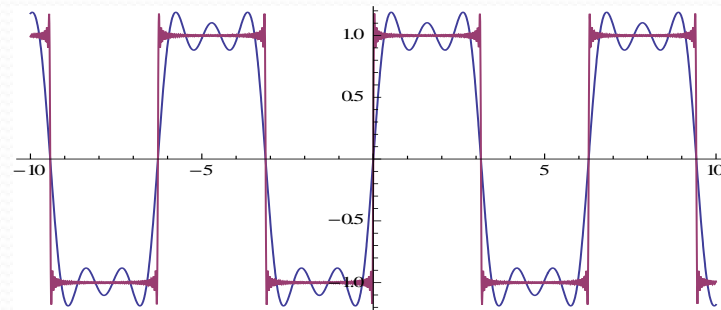
- $f_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ と $f_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ を重ね合わせたときの波形を求め、その波の様子を説明せよ。

さまざまな波形の周期的な波

(2013 PSL 07 矩形波解.nb)

- 波動方程式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ の解 $g(x - ct)$ は波
- たとえば、振幅 A 、波数 k の矩形波はサイン波の重ね合わせで表せる(フーリエ級数)

$$g(x - ct) = A \cdot \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(kx - \omega t) + \frac{1}{3} \sin(3kx - 3\omega t) + \dots \right\}$$
$$= A \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin((2j-1) \times (kx - \omega t))$$



うなり

beat

- 振動数・波数が異なり, 同じ振幅のサイン波の重ね合わせると

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$$

$$A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2A \cos \left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

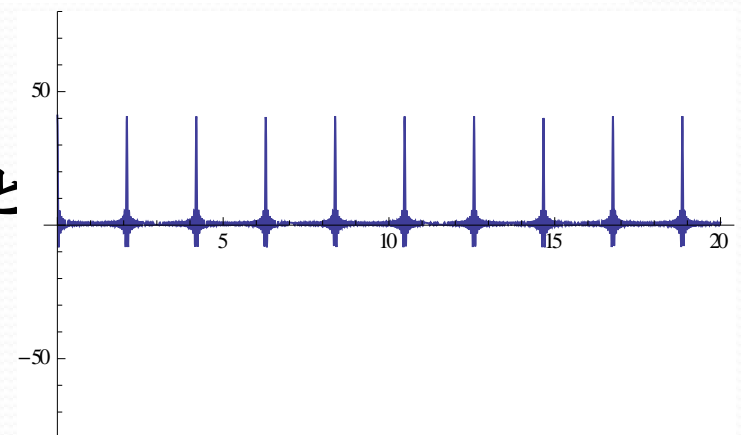
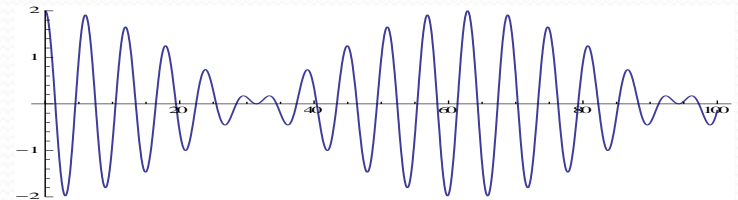
- $k_1 \simeq k_2, \omega_1 \simeq \omega_2$ のとき

$$\text{搬送波の振動数} \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$$

$$\text{振幅変調} \quad \cos \left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

$$\text{うなりの振動数} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \times 2 = \omega_1 - \omega_2$$

- 振動数が等間隔のサイン波を重ね合わせると
するどいパルス列になる



問2

(1) $v_1 = 400$ Hzの音叉と、それよりわずかに低い振動数 v_2 の音叉を同時に鳴らすと、 $T = 1$ 秒ごとに音が大きくなった。もうひとつの音叉の振動数を次の手順で求めよ(まず一般的な式をつくり、つぎに具体的な数値を入れて計算する)。

- 各振動を $f_1(t) = Ae^{i\omega_1 t}$, $f_2(t) = Ae^{i\omega_2 t}$ の形に表し, $f = f_1 + f_2 = [\quad] \times e^{i\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t}$ の形にまとめよ。
- $\text{Re}[f] = \text{Re}[f_1 + f_2]$ を求めよ(これが, 観測される音波 = 圧力あるいは密度の変位)。 A は実数とする。
- $\text{Re}[f]$ のグラフの概略を描け。 $\omega_1 \simeq \omega_2$ とする(題意の数値だと特徴を表現しにくいので適宜設定)。
- $\text{Re}[f]$ が(正負いずれの場合でも)大きいと音が大きい。 $\omega_1 \simeq \omega_2$ として音の大きさの周期 T を求めよ。
- 題意の数値を用いて v_2 の値を求めよ。

(2) 同じ速さで伝わる2つの波($\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$), $A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$ と $A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$ を重ね合わせると,

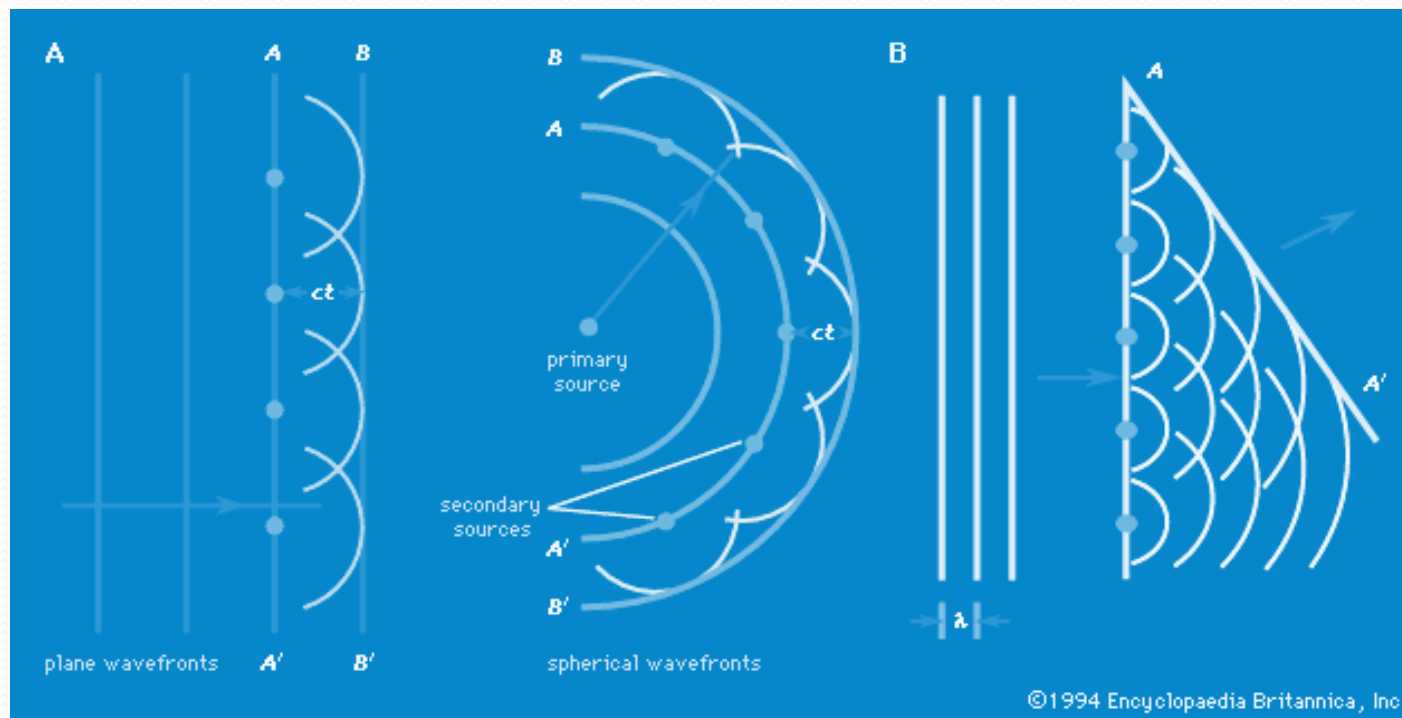
$$f(x, t) = 2A\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

となる。信号波形 $\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]$ が伝わる速さを求めよ。

ホイヘンスの原理

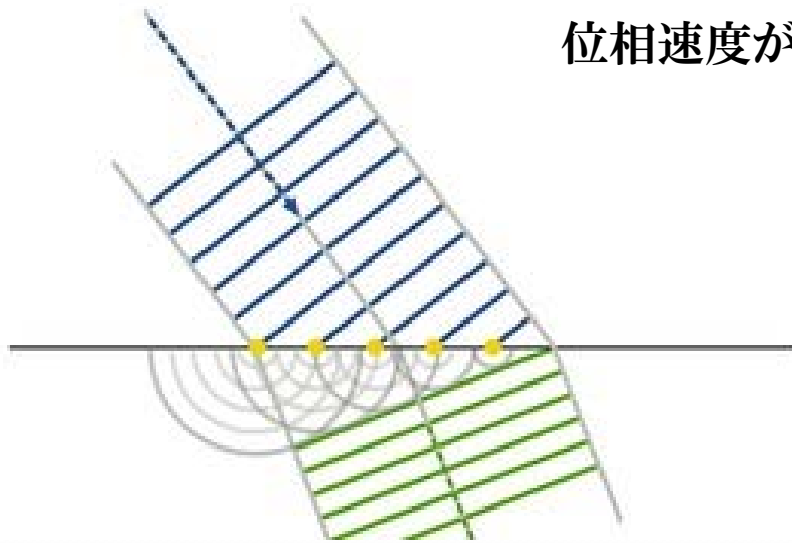
Huygens–Fresnel principle

- 進行波の波面の各点が2次波の波源となり、全体としての進行波は(既に伝播した媒質から生じる)全ての2次波を重ね合わせたものとなる

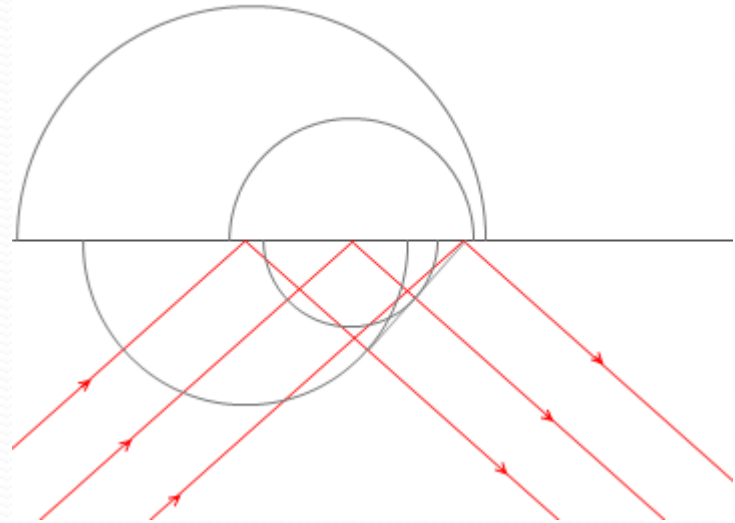


ホイヘンスの原理（屈折，全反射）

refraction, total reflection



位相速度が大きい媒質



位相速度が小さい媒質

問3

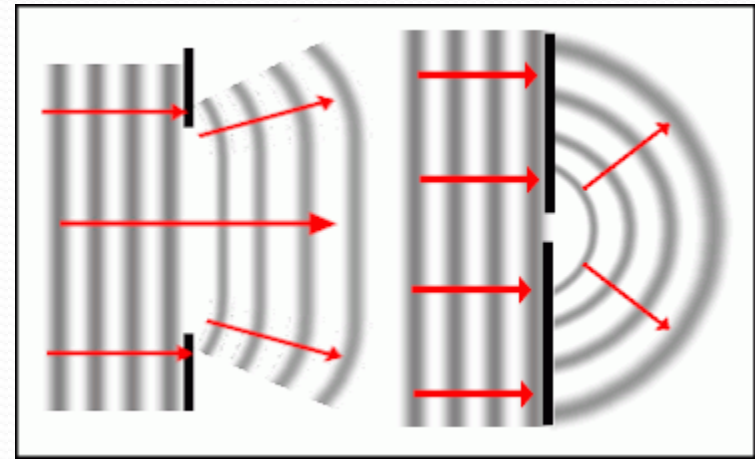
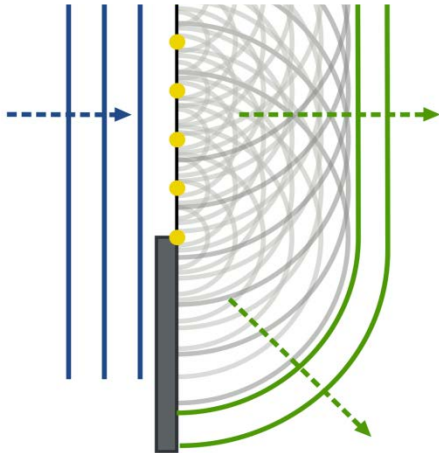
一直線上に波源が並んでいる。直線上で1波長分だけ離れた2つの波源の位相差が π のとき、波が進む向きと直線のなす角はどれだけか。ホイヘンスの原理を用いて推定せよ。

回折

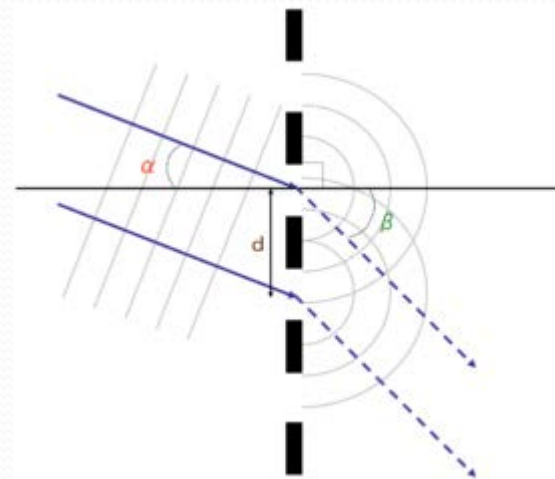
diffraction

回折とホイヘンスの原理

障壁の後ろに波が回り込む



波長に比較して開口が大きいとき, 小さいとき



多重スリットによる回折