2　進行波と定在波

同じ振幅 A，同じ振動数 ω，同じ波数 k の波(したがって同じ速さ)が，媒質中を互いに逆向きに進み，それらが重ね合わされる：

$$f(x,\, t) \;=\; A\cos(k\,x - \omega t) \;+\; A\cos(k\,x \;+\; \omega t)$$

この式の各項を加法定理により展開してまとめると

$$f(x,\, t) \;=\; 2\,A\,coskx\;\;cos\omega\;\boldsymbol{t}$$

となる.

$cos\omega t \;=\; 0$ となる時刻には，媒質の全域で

$$f(x,\, t) \;=\; 0$$

$cos\omega t \;=\; 1$ となる時刻には,

$$f(x,\, t) \;=\; 2A\,coskx$$

$cos\omega t \;=\; -1$ となる時刻には,

$$f(x,\, t) \;=\; -2A\,coskx$$

などとなる．結局,

$$\pm\, 2A\,coskx$$

という２つの曲線の間で，どの位置も同じ位相で，振動数 ω の振動が起きる.

波のパターンは媒質を移動しない．定在波という.

振幅が０の位置を節（ふし），振幅が最大の位置を腹（はら）という.

進行波が媒質の端で反射されて戻るとき，定在波が観察される

　　両端を固定した弦では，定在波がたって振動する.

　　金属板や鐘が共鳴するときも定在波が立って振動する

　　気柱で共鳴する音波も同様である.

　　ビルの谷間でラジオの電波が強い場所と弱い場所ができるのも定在波による場合が多い

サイン波ではない波が左右から来て重なる場合

たとえば

$$A1\,cos(k1x - \omega 1t)\;\;+\;A2\,cos\,(k2x - \omega 2t)$$

と

$$A1\,cos(k1x\;\;+\;\omega 1t)\;\;+\;A2\,cos(k2x\;+\;\omega 2t)$$

が重なり合うとき，各項が定在波をつくり

$$2A1\,cosk1x\,cos\omega 1t\;\;+\;\;2A2\,cosk2x\,cos\omega 2t$$

という波形を観測することになる.

ω_1 と ω_2 の値が異なるため，最大振幅の位置や振幅 0 の位置は動くが，波が一方向に伝わることはない.

これも定在波としてよいだろう.

3　問１

サイン関数の和の公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を用いると$f_1=A\sin(kx-\omega t)$と$f_2=A\sin(kx+\omega t)$の和は

$$f=f_1+f_2=A\sin(kx-\omega t)+A\sin(kx+\omega t)=2A\sin kx\cos\omega t$$

となる。

この波の節（ふし，node，fが 0 となるところ）や腹（はら，loop，f の振幅が極大となるところ）の位置は$\sin kx$だけにより決まり，t によって変化しない。

この波は移動しないので**定在波**（standing wave）という。これに対して，空間を進んでいく波を**進行波**（traveling wave）という。

4　さまざまな波形の周期的な波
(2013 PSL 07 矩形波解.nb)

波動方程式の解としては，速さ c で波形を崩さずに伝わるもの $g(x-ct)$ （の重ね合わせ）なら，どんなものでもよい.

たとえば，振幅がAで波数がkの矩形波も，波動方程式の解である.
このことを，フーリエ級数の知識をもとに理解してみよう.

この矩形波をフーリエ展開すると $sin\left(kx - \omega r\right)$, $\frac{1}{3}sin3kx - 3\omega t)$, etc のサイン波が含まれていることがわかる.

それぞれのサイン波は x 軸正方向に速さ $c = \frac{\omega}{k}$ で伝わる．したがってその重ね合わせである矩形波も
同じ速さで伝わる波である.

単一パルスのような非周期的な波の場合には，フーリエ変換によって連続的な振動数の分布をもつサイン，コサインの波に分解できる.

各成分がすべて同じ速さで伝わる波なので，それらを重ね合わせてできるパルスも同じ速さで伝わる
現実の媒質では，振動数によって波の速さが異なる場合がある（「分散がある」という）.
このときは，出発した時点で矩形波であっても，波が伝わるにつれて波形が乱れる.
分散のある媒質を伝わるパルス波形（情報の通信）がもとの情報を保つには（＝パルスが鈍っても識別できるようにする），通信速度に上限を設ける必要がある

5　うなり

以前のスライドでは，同じ振動数のサイン波を重ね合わせ異なる波形が生じる様子を観察した.
ここでは，異なる振動数のサイン波を重ねたときの波形の変化を観察する.
まず，同じ振幅で振動数が異なる２つのサイン波（どちらも同じ向きに進む）を重ね合わせる.
両方とも，一つの媒質を伝わる波なので，伝わる速さcは同じであり，
それぞれの振動数と波数の間には

$$\frac{\omega 1}{k1} = \frac{\omega 2}{k2} = c$$

の関係がある.

$$f(x, t) = A\cos(k1\, x - \omega 1\, t) + A\cos(k2\, x - \omega_2 t)$$

加法定理によって式を変形すると

$$f(x, t) = 2A\cos\left[\frac{1}{2}\left(k1 - k2\right)x - \frac{1}{2}(\omega 1 - \omega 2)t\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}\left(k1 + k2\right)x - \frac{1}{2}\left(\omega 1 + \omega 2\right)t\right]$$

重ね合わせる前の波がどちらも同じ速さで進むので，重ね合わせたあとの波も，一定の波形をたもって，同じ速さで進む.
では，どのような波形だろうか.
ここで，二つの波が非常に近い振動数と波数をもつとしよう．そうすると　上式右辺の最初の振動項

$$\cos\left[\frac{1}{2}\left(k1 - k2\right)x - \frac{1}{2}(\omega 1 - \omega 2)t\right]$$

は非常にゆっくりした振動で長波長の波になり，第 2 の振動項

$$\cos\left[\frac{1}{2}\left(k1 + k2\right)x - \frac{1}{2}\left(\omega 1 + \omega 2\right)t\right]$$

は，両者の振動数，波数の平均値，したがって重ね合わせる前の一方の波と同じになる.
言い換えると，一方の波の振幅が波数$\frac{1}{2}(k1 + k2)$，*振動数*$\frac{1}{2}(\omega 1 - \omega 2)$の波で変調されたことになる.
音の場合，たとえば　400 Hz と 402 Hz の音を同じ振幅で重ねると，401 Hz の音の大きさが大きくなったり小さくなったりする
ように聞こえる．となりあう大きな音は　402-400 = 2 Hz　の間隔でやってくる．(1/2) (ω_1-ω_2）だから 1Hz と思うかもしれないが
音の振幅が（符号によらず）大きくなるときに音は大きくなるので，振幅のサイン波の倍の周期で音が大きくなる.
振動数が等間隔で異なるたくさんのサイン波を加え合わせると，鋭いパルスの列が生じる.

6　問 2

(1)

$$f = A\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = Ae^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}\left(e^{i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t} + e^{-i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t}\right) = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right] \times e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$$

$$\mathrm{Re}[f] = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

求める周期は，$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$の半周期に等しい：$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)} \times \frac{1}{2} = \frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\nu_1-\nu_2}$

$\nu_2 = \nu_1 - \frac{1}{\mathrm{T}} = 400 - 1 = 399\ \mathrm{Hz}$

(2)

$$\frac{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\frac{1}{2}(k_1-k_2)} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{ck_1-ck_2}{k_1-k_2} = c$$

7 ホイヘンスの原理

2 次元，3 次元の波の伝播を直感的に理解する

平面波：　媒質中の同じ位相で振動する点をつないでできる波面が平面である.

１．ある波面に注目すると，その波面のどの点も同じ位相で振動する.

２．振動する各点から仮想的な球面波（2 次波という）が出発する.

３．たくさんの 2 次波が重ね合わされ，平面波の進行方向の前方であらたな平面波の波面をつくる.

４．昔しにつくられた 2 次波が重ね合わされてできて進んできた平面波と，今つくられた平面波は，位相が同じ

４．2 次波は後ろ向きにも出るが，前方のたくさんの波面から後ろ向きに進んでくる 2 次波を重ね合わせると，位相がそろわずに消える.

球面波も同様に理解する

平面波を斜めに横断する境界面上の各点では，振動の位相が少しずつ異なる

各点は位相が少しずつ異なる 2 次波を放出するので，それらの重ね合わせは，斜めに進む.

境界面から先も同じ媒質であれば，その斜めの方向は，もとの平面波の進行方向と一致する.

境界面から先が異なる媒質で波の速さが異なると，斜めの方向は，もとの平面波の進行方向から屈折する

8 ホイヘンスの原理　（屈折，全反射）

波が異なる媒質を通過するときも，振動数は変わらない.
媒質により，波の速さが異なる（波長が変わる）.

左図
平面の境界面に，平面波が斜めに侵入するとき，境界面上の各点で位相が少しずつずれた 2 次波が発生する.
図の水平線（境界面）の右側ほど遅れて平面波が入射するので，2 次波の同じ位相をもつ半径は，右側ほど小さくなる.
波の速さが遅いと，2 次波の半径も小さいので，屈折の角度が大きくなる.

右図
位相速度が遅い媒質から速い媒質に波が入るとき，入射する方向が斜めになって境界面に近づくと，
位相速度が速い媒質中で 2 次波が速く進み，あとから来る（上半分にある右側の半円）2 次波が追いつかなくなる.

このとき，2 次波が干渉して平面波をつくることができない．したがって，上半分の媒質に波が侵入できなくなる
すべての波が反射されるので，全反射という.

9　問 3

相差を$\Delta\phi$，波長をλとすると，2 次波面（円，球）の半径の差ΔRは，

$$\Delta R = \lambda \times \frac{\Delta\phi}{2\pi}$$

となる．波面と直線のなす角をθとすると

$$\sin\theta = \frac{\Delta R}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

波が進む方向は波面と垂直なので，求める角度は$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$（60°）となる．

10　回折

回折現象

ホイヘンスの原理を使うと，波が障壁の後ろに回り込むことが分かる.

右上図のように，障壁が両側から迫っているとき，平面波は開口を通り抜けるときに拡がる.

開口が小さいと，球面波に近い波面になる.

右下図のように，スリットが等間隔に並ぶとき，2 次波が干渉して平面波をつくるのが，いくつかの方向になる.

スリットの間隔と波長から，方向が決まるので，波長を分析する道具になる.