第 7 回　波の干渉

Q1

$f_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ と$f_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$ を重ね合わせたときの波形を求め，その波の様子を説明せよ．

Q2

(1) ν_1=400 Hz の音叉と，それよりわずかに低い振動数ν_2の音叉を同時に鳴らすと，T =1 秒ごとに音が大きくなった．もうひとつの音叉の振動数を次の手順で求めよ（まず一般的な式をつくり，つぎに具体的な数値を入れて計算する）．

・それぞれの振動を$f_1(t) = Ae^{i\omega_1 t}$および$f_2(t) = Ae^{i\omega_2 t}$の形で表し，$f = f_1 + f_2 = [\quad] \times e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$の形にまとめよ．

・$\mathrm{Re}[f] = \mathrm{Re}[f_1 + f_2]$を求めよ(これが観測される音波，したがって圧力あるいは密度の変位)．Aは実数とする．
・$\mathrm{Re}[f]$のグラフの概略を描け．$\omega_1 \simeq \omega_2$とする（題意の数値だと特徴を表現しにくいので適宜設定)．
・$\mathrm{Re}[f]$が（正負いずれの場合でも）大きいと音が大きい．$\omega_1 \simeq \omega_2$として音の大きさの周期Tを求めよ．
・題意の数値を用いてν_2の値を求めよ．

(2) 同じ速さで伝わる 2 つの波$\left(\frac{\omega 1}{k1} = \frac{\omega 2}{k2} = c\right)$，$A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$と$A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$を重ね合わせると，

$$f(x,t) = 2A\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

となる．$\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]$が伝わる速さを求めよ．

Q3.

一直線上に波源が並んでいる．直線上で 1 波長分だけ離れた 2 つの波源の位相差が π のとき，波が進む向きと直線のなす角はどれだけか．ホイヘンスの原理を用いて推定せよ．

第７回

A1.

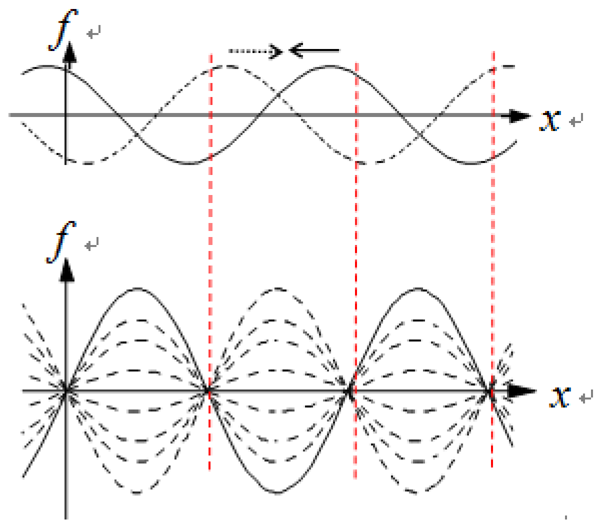
サイン関数の和の公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を用いると$f_1 = A\sin(kx-\omega t)$と$f_2 = A\sin(kx+\omega t)$の和は

$$f = f_1 + f_2 = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t)$$
$$= 2A\sin kx\cos\omega t$$

となる。この波の節（ふし，node，fが 0 となるところ）や腹（はら，loop，fの振幅が極大となるところ）の位置は$\sin kx$だけにより決まり，tによって変化しない。



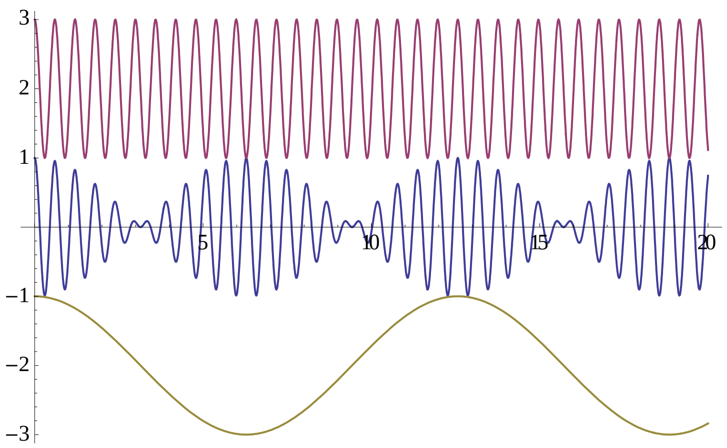
この波は移動しないので**定在波**（standing wave）という。これに対して，空間を進んでいく波を**進行波**（traveling wave）という。

A2

(1)

$$f = A\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = Ae^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}\left(e^{i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t} + e^{-i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t}\right) = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\times e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$$

$$\mathrm{Re}[f] = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$



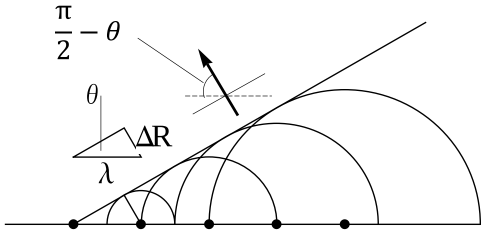
求める周期は，$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$の半周期に等しい：$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)}\times\frac{1}{2} = \frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{\nu_1-\nu_2}$

$$\nu_2 = \nu_1 - \frac{1}{\mathrm{T}} = 400 - 1 = 399\ \mathrm{Hz}$$

(2)

$$\frac{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\frac{1}{2}(k_1-k_2)} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{ck_1-ck_2}{k_1-k_2} = c$$

A3



位相差を$\Delta\phi$，波長をλとすると，2 次波面（円，球）の半径の差ΔRは，

$\Delta R = \lambda \times \frac{\Delta\phi}{2\pi}$

となる．波面と直線のなす角をθとすると

$$\sin\theta = \frac{\Delta R}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

波が進む方向は波面と垂直なので，求める角度は$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$（60°）となる．