気柱の共鳴

- 空気の性質と音速
- 気柱の共鳴

体積弾性率 vs バネ定数

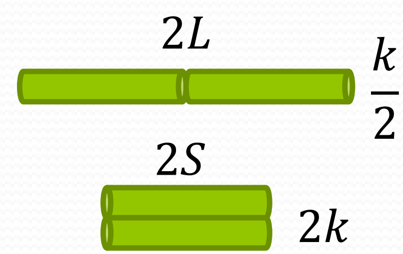
- バネ定数　復元力の変化/長さの変化
  - $\underbrace{L = \Delta x\text{の区間}}_{\text{自然長}}$が$\underbrace{\Delta y\text{だけ変化}}_{\text{伸び}}$

  - 自然長からの伸び $\Delta y \Rightarrow \quad F = -k\,\Delta y, \quad k = -\frac{F}{\Delta y}$
  - 変形の割合 $\frac{\Delta y}{L} \Rightarrow \quad kL = -\frac{F}{\Delta y/L}$
  - 圧力変化 $p = F/S \Rightarrow$

$$\boxed{k\frac{L}{S}} = -\frac{F/S}{(\Delta y\cdot S)/(L\cdot S)} = \boxed{-\frac{p}{\Delta V/V}}$$

- 体積弾性率：規格化されたバネ定数

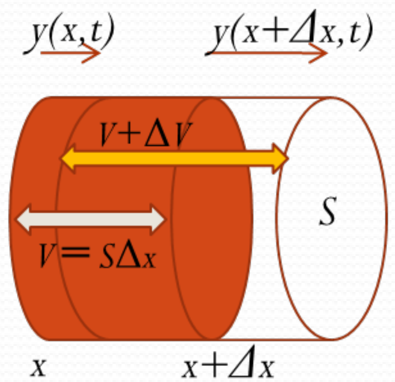
$$\boxed{B} = \boxed{-\frac{p(x,t)}{dV/V}}$$



媒質中の音速　1

体積弾性率　bulk modulus

- x軸方向に伝わる縦波の音波により，媒質が変位：$y(x,t)$
- 長さΔx，断面積 S の円筒の体積が音波により変化する相対変化率：dV/V
- $\Delta x \to 0$ の極限で，　$\frac{dV}{V} \to \frac{\partial y}{\partial x}$



Δxの区間がΔyだけ変化

- 体積弾性率

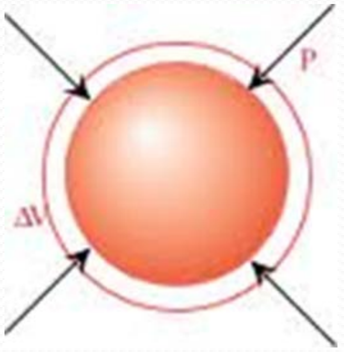
$$\boxed{B = -\frac{p(x,t)}{dV/V}}$$

単位は　圧力の単位と同じ [N/m² = Pa]

- 音波による圧力変化を変位と関係づける式

$$p = -B\, dV/V = -B\, \Delta y/\Delta x$$

$$p(x,t) = -B\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$



問1

(1) ボイル・シャルルの法則 $PV = nRT$に従う気体の体積弾性率（以下の問(2)(3)も含めて等温過程とする）を計算せよ.

(2)　常温大気圧（1 atm ～10^5 Pa, 1Pa=1N/m^2）の空気がボイル・シャルルの法則に従うとして，その体積弾性率の値を概算せよ. 体積を1%だけ変化させたときの圧力変化は

(3) 断面積S =1 cm^2の注射器に大気圧の空気を閉じ込め，長さL =10 cm の気柱を作るとバネのような復元力を生じた. 等温圧縮・膨張とする. バネ定数はどれだけか

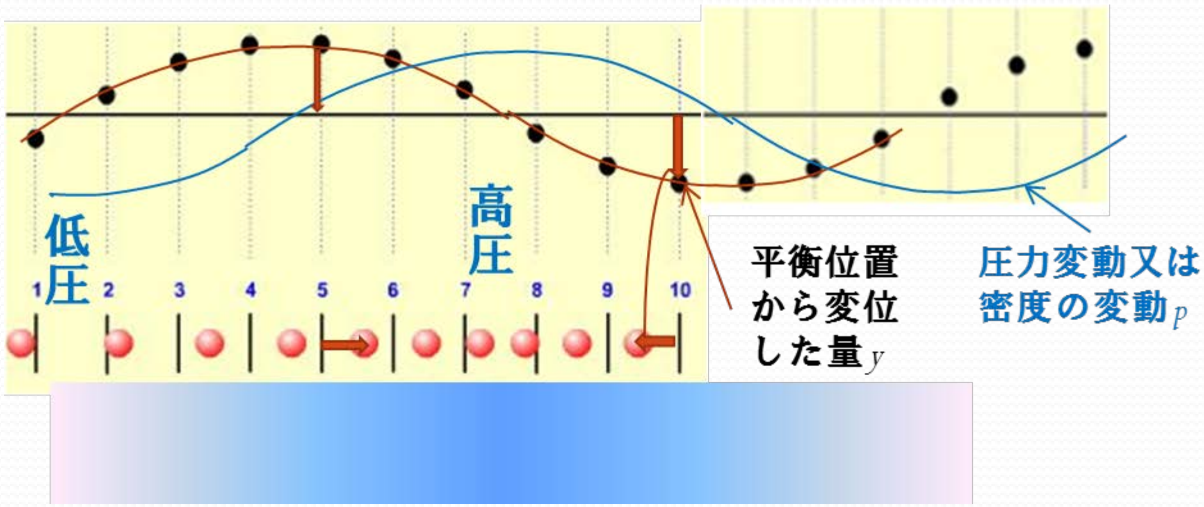
気体･液体中の音速 2

変位と密度の関係

- **サイン波：**

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$
$$p(x,t) = -B\frac{\partial y}{\partial x} = BkA\sin(kx - \omega t)$$

- **変位と圧力変動は1/4波長ずれる**
- **圧力変動の振幅：** $p_{\max} = kBA = \dfrac{2\pi}{\lambda}BA$



問2

1 kHzのサイン波の音で，耳に聞こえる最小の圧力変動の振幅が3×10^{-5}Paであった（大気圧）．

このとき空気の変位の振動の振幅はどれだけか．音波による圧縮膨張が等温過程であるとし（後に断熱過程が適切なモデルであることを学ぶ），体積弾性率$B = 10^5$ Pa．音速をc =340 m/sとせよ

断熱変化の体積弾性率

- 音の振動が速い
  - 外部が出入りする前に1周期が終わる

    膨張や収縮は断熱過程となる

- 断熱変化：　$PV^{\gamma}=$ 一定（κ と書くことにする），

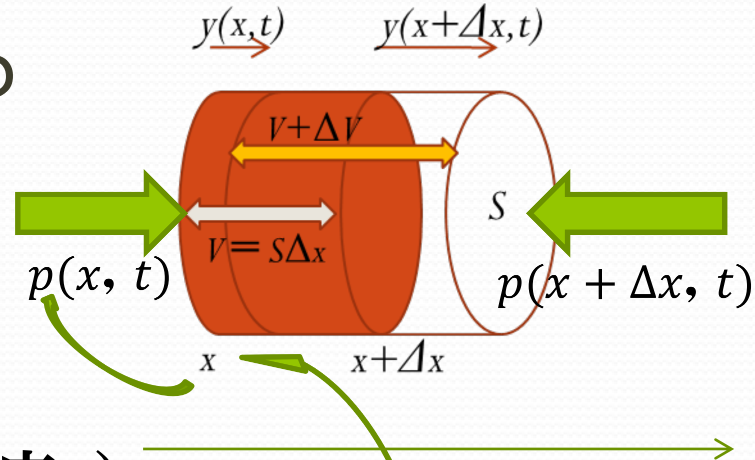
  $\gamma=$ 定圧比熱/定積比熱, 2原子分子で1.4

- 体積弾性率

圧力Pの変化分、p

$$B=\frac{-dP}{\frac{dV}{V}}=-\frac{dP}{dV}V=-V\frac{d}{dV}\left(\kappa V^{-\gamma}\right)=\kappa\gamma V^{-\gamma}=\gamma P$$

媒質中の音速３
波動方程式から音速を求める



断面積Sの円筒の音波による運動

＜音波がないとき, $x \sim x+\Delta x$の媒質の部分＞

質量：　$\Delta m = \rho\, \Delta x\, S$　（媒質の密度ρ）

加速度：　$a = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$　（変位yの時間の2階微分）

力：　$\Delta F = S \times \left(\underbrace{p(x,t) - p(x+\Delta x, t)}_{\text{両側から加わる圧力差}} \right)$，　$p(x,t)$の向きが正

運動方程式：$\Delta F = \Delta m \times a$ →

$$\boxed{S \times (p(x,t) - p(x+\Delta x, t)) = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho \Delta x S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

運動方程式から波動方程式へ

$$S \times (p(x,t) - p(x+\Delta x, t)) = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho\, \Delta x\, S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

円筒を薄くして1点の近傍の運動に注目する

- $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ （両辺を $S\Delta x$ で割り，$\Delta x \to 0$の極限）
- $p(x,t) = -B \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ 両辺をxで微分して左辺に代入 $B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

縦波音波の波動方程式

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

- 音速 $c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P V_0}{\rho V_0}} \to \sqrt{\frac{\gamma R T}{\text{モル質量}}}$

音のパワー密度(強度) 1

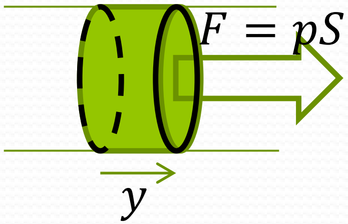
- 音が運ぶエネルギー
  - 圧縮・膨張の位置エネルギー　＋　運動エネルギー
- 単振動　$y = A\cos(kx - \omega t),\ \ \omega = kc, \dfrac{\partial y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$,
  - 運動エネルギーの密度の時間平均

$$\frac{1}{2}mv^2 \to \frac{1}{2}\rho\{S\Delta x\}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \to \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) \to \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2$$

  - 全エネルギー密度の時間平均：$u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$
  - パワー密度の時間平均：

$$I = cu = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho k c^2 \omega A^2 = \frac{1}{2}\rho k \frac{B}{\rho}\omega A^2 = \frac{1}{2}kB\omega A^2$$

音のパワー密度(強度) 2



- 音波によるエネルギー伝達
  - 断面Sが右側の媒質にする仕事 = 力×変位= pSy
  - 単位時間当たりの仕事 = 仕事率 = 力×変位の速度 =$pS\frac{\partial y}{\partial t}$

Sで割る

- 音の強度　intensity
  - 強度　= パワー密度:　単位面積，単位時間あたりのエネルギー $= \; p\frac{\partial y}{\partial t}$
  - 瞬時値
  - 単位　[W/m²]

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega\, A\sin(kx - \omega t)$$
$$p(x,t) = -B\frac{\partial y}{\partial x} = Bk\sin(kx - \omega t)$$

- サイン波
  - 強度 = $B\omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t)$
  - 強度の時間平均 I

$$\boxed{I = \; B\omega k\, A^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}kB\omega A^2 = \frac{1}{2\sqrt{\rho B}}\, p_{\max}{}^2}$$

- 圧力振幅で表わせば周波数に依存しない

問3

(a) 音圧（音波による圧力変動の振幅）と音の強度の関係を調べ，音圧が1桁大きくなるときの変化が20dBであることを確認せよ（音圧が1桁大きいとき「音圧レベルが20dB大きい」という言い方をする）.

(b) 問2の可聴の最小圧力変動を基準とすると，日常の会話の音圧レベルは60 dB大きい．その音圧の振幅はどれだけか．

気柱の共鳴　１
定在波の発生

- Kundt管を用いた定在波の観察
  - 気体が動かない「変位の節」に粉がたまる
  - 隣合う節の間隔が λ/2

気柱の共鳴　2
基本振動数(基音)と倍音

- **片側が閉じた管**

  $\nu, 3\nu, 5\nu, 7\nu, \mathrm{etc}$

  補正

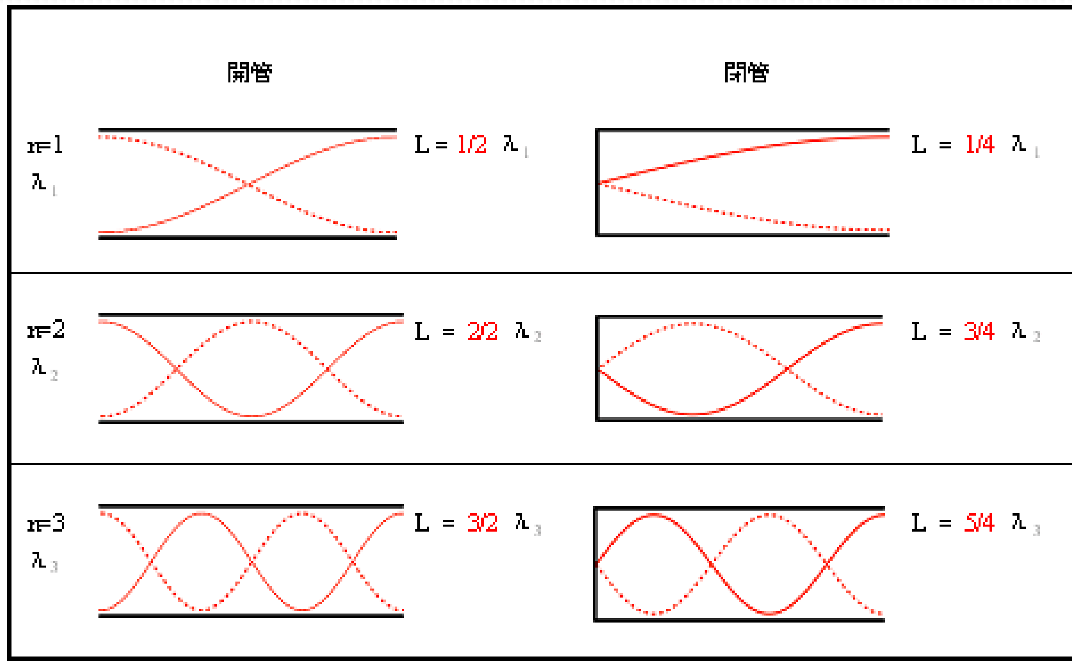
  $$n\nu = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{4(L+e)}$$

- **両側が開いた管**

  $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, \mathrm{etc}$

  補正

  $$n\nu = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2(L+2e)}$$



問4

(1) 一端を閉じた長さ0.845 mの管が100 Hzと300 Hzで共鳴することがわかっている.

管内の音速を340 ms^{-1}とする.

(i) この管の基本振動数を計算せよ.

(ii) この管の基本振動数の音について(i)管内の波長と(ii)開口端補正を計算せよ.

(2) 寒い冬の朝に，吹奏楽団の朝練があった.

温度が低いので，金管楽器の長さが縮んでいる. また，音速が遅くなっている.
楽器を鳴らすと<u>音程が下がって</u>いることが分かった. 管の長さが縮んだのと，
音速が遅くなったのとが，音程(音階で決められた音名の音の振動数，ピッチ)にどのように影響するかを考察せよ.