

第9回 気柱の共鳴

Q1

- (1) ボイル・シャルルの法則 $PV = nRT$ に従う気体の体積弾性率（以下の問(2)(3)も含めて等温過程とする）が $B = P$ となることを示せ。注意：圧力の変化 p と圧力 P を混同するな。
- (2) 地表で常温の大気圧（ $1 \text{ atm} \sim 10^5 \text{ Pa}$, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ）の空気がボイル・シャルルの法則に従うとして、その体積弾性率の値を概算せよ。体積を 1% だけ変化させたときの圧力変化は
- (3) 断面積 $S = 1 \text{ cm}^2$ の注射器に大気圧の空気を閉じ込め、長さ $L = 10 \text{ cm}$ の気柱を作るとバネのような復元力を生じた。バネ定数はどれだけか。

Q2

1 kHz のサイン波の音で、耳に聞こえる最小の圧力変動の振幅が $3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ であった（大気圧）。このとき空気の変位の振動の振幅はどれだけか。音波による圧縮膨張が等温過程であるとし（後に断熱過程が適切なモデルであることを学ぶ）、体積弾性率 $B = 10^5 \text{ Pa}$ 。音速を $c = 340 \text{ m/s}$ とせよ。

Q3

- (a) 音圧（音波による圧力変動の振幅）と音の強度の関係を調べ、音圧が 1 桁大きくなる時の変化が 20dB であることを確認せよ（音圧が 1 桁大きいとき「音圧レベルが 20dB 大きい」という言い方をする）。
- (b) Q2 の可聴の最小圧力変動を基準とすると、日常の会話の音圧レベルは 60 dB 大きい。その音圧の振幅はどれだけか。

Q4

- (1) 一端を閉じた長さ 0.845 m の管が 100 Hz と 300 Hz で共鳴することがわかっている。

管内の音速を 340 ms^{-1} とする。

- (i) この管の基本振動数を計算せよ。
- (ii) この管の基本振動数の音について(i)管内の波長と(ii)開口端補正を計算せよ。

- (2) 寒い冬の朝に、吹奏楽団の朝練があった。

温度が低いので、金管楽器の長さが縮んでいる。また、音速が遅くなっている。

楽器を鳴らすと音程が下がっていることが分かった。管の長さが縮んだのと、音速が遅くなったのが、音程(音階で決められた音名の音の振動数, ピッチ)にどのように影響したか考察せよ。

解答

A1

(1) $PV = nRT$: P 圧力, V 体積, n モル数, R 気体定数, T 絶対温度

- ・圧縮による圧力の変化分を小文字を用いて p と書く: 圧縮前 = P → 圧縮後 = $P + p$ (膨張なら $p < 0$)
- ・この圧縮による体積変化を ΔV とする: 圧縮前 = V → 圧縮後 = $V - \Delta V$ (膨張なら $\Delta V < 0$)
- ・題意により等温変化とするから $T = \text{一定}$.

よって, 圧縮により圧力と体積が変化してもそれらの積が一定となる:

$$(P + p)(V - \Delta V) = PV = nRT$$

左辺を展開して中辺と等しいとおき, 微量 p と ΔV の 1 次までを採用する近似を行うと

$$pV - P\Delta V = 0$$

この関係を体積弾性率 B の定義 $B = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}}$ に代入して整理すると

$$B = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{pV}{\Delta V} = P$$

ボイル・シャルルの法則に従う気体の等温変化では, 体積弾性率とそのときの圧力が一致することが分かった.

(2) 前問から

$$B = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{pV}{\Delta V} = P = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

体積を 1% だけ変化させたときの圧力変化は

$$p = B \frac{\Delta V}{V} = (1 \times 10^5 \text{ Pa})(0.01) = 1 \times 10^3 \text{ Pa} \left(= \frac{1}{100} \text{ 気圧} \right), \quad \frac{p}{P} = \frac{p}{B} = \frac{\Delta V}{V} = 1\%$$

この結論は, 等温変化の式 $PV = \text{一定}$, よって $(P + p)(V - \Delta V) = PV \rightarrow pV = P\Delta V \rightarrow \frac{p}{P} = \frac{\Delta V}{V}$ から確認できる.

(3) シリンダー内の体積を変える前の状態では, ピストンの内と外から大気圧 P が加わりつりあっている. 体積が変化した状態では, ピストンを外側から押す力 F (大気圧からの変化分) と, シリンダー内の空気の圧力の増加により変化した力 pS が等しい.

シリンダーの長さが ΔL 変化したときの圧力変化 p と, 体積変化 $\Delta V = S\Delta L$ の関係を体積弾性率で結びつけると,

$$F = S \times p = S \times B \frac{\Delta V}{V} = S \times B \frac{S\Delta L}{SL} = SB \frac{\Delta L}{L}$$

この関係式をバネの復元力の式と見ると, $k = F/\Delta L$ がバネ定数に相当する量である:

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{S}{L} B = \frac{1 \text{ cm}^2}{10 \text{ cm}} \times 10^5 \text{ Pa} = \frac{10^{-4} \text{ m}^2}{10^{-1} \text{ m}} \times 10^5 \text{ Pa} = 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{m} = 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{m} = 10^2 \text{ N/m}$$

A2

波数 $k = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c} = 2\pi \times \frac{10^3}{340} \text{ m}^{-1}$, 体積弾性率 $B = 10^5 \text{ Pa}$, 圧力変動の振幅 $p = 3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$, 変位の振幅 A

$$p = kBA \rightarrow A = \frac{p}{kB} = \frac{3 \times 10^{-5}}{2\pi \times \frac{10^3}{340} \times 10^5} = 0.15 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.5 \times 10^{-11} \text{ m}$$

この変位の大きさは、原子の大きさよりも小さい！

A3

「気体中の音速 2」で学んだように、媒質の体積弾性率 B 、サイン波の音波の波数 k 、音波による変位の振幅 A のとき音圧は

$$p = kBA$$

である。これと、音の平均強度の式

$$I = B\omega k A^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

から振幅を消去し、音速を $c \left(= \frac{\omega}{k}\right)$ と書くと

$$I = B\omega k \left(\frac{p}{kB}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\omega p^2}{kB} = \frac{1}{2} \frac{c}{B} p^2$$

一方、音の強さ I の dB 表示は、第 8 回で学んだように、基準とする強さが I_0 のとき $10 \times \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right)$ と計算するので

$$10 \times \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \times \log_{10} \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 20 \times \log_{10} \left(\frac{p}{p_0}\right)$$

である。題意のように $p_2 = 10 \times p_1$ のとき、dB で表示した量は

$$10 \times \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 20 \times \log_{10} \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 20 \times \log_{10} 10 = 20$$

となり 20 dB 変化する。

(b) 音の強さが 60 dB 大きいことから、音圧は $60 \div 20 = 3$ 桁大きい。

$$3 \times 10^{-5} \text{Pa} \times 10^3 = 3 \times 10^{-2} \text{Pa}$$

A4

(1) 片端が閉口端の気柱の共鳴振動数の比 1:3:5:...のパターンと照合し、基本振動数は 100 Hz.

(i) 基本振動数の波長は $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{100 \text{ Hz}} = 3.40 \text{ m}$,

(ii) 開口端補正 $e = \frac{1}{4}\lambda - L = \frac{3.40 \text{ m}}{4} - 0.845 \text{ m} = 0.005 \text{ m}$

(2)

$v \propto \frac{c}{L}$ の関係をもとにして考える。

音速が同じであれば、管の長さが短くなると（共鳴する波長が短くなり）振動数が高くなる。

管の長さが同じであれば、音速が遅くなると振動数が下がる。

朝練のときに音程が下がったのは、管の縮み方より音速の低下が顕著であったため。