第 10-11 回　弦の波と共鳴

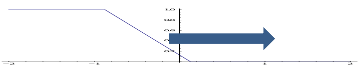
Q1　(1) 弦の張力Tと線密度ρを用いて，弦を伝わる横波の速さcを表す式を書け.

(2) Tとρの次元（あるいは単位）から，(1)の式の次元（あるいは単位）が速さとなることを確認せよ.

(3) x軸方向に張った弦の横波（変位は y 軸方向，$y(x,t)$）が従う波動方程式を書け．$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$の次元は何か.

Q2　弦を伝わる波形$y(x,t)$が図のように幅Lの間で直線的に 0 からAまで上昇し，それ以外の位置では一定とする（津波の波形）．式で表すと

$$y(x,t)=\begin{cases} 0\cdots & ①L\le x-ct \\ A-\frac{A}{L}\cdot(x-ct) & \cdots②0\le x-ct\le L \\ A\cdots & ③x-ct<0 \end{cases}$$



である.

(i) ②の部分が移動する速さはどれだけか.

(ii) ②の部分が y 方向に変位する速さを求め，その微小な部分dxの運動エネルギーを計算せよ.

(iii) ②の部分は，もともと長さLの弦が引き伸ばされて$\sqrt{L^2+A^2}$となった．伸びの量が小さく$L\gg A$として，伸びた量（変形量）$\sqrt{L^2+A^2}-L$の値の近似値が$\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}$となることを確認せよ.

(iv) (iii)の結果を用いて，②の部分のdxに蓄えられた位置エネルギー（張力Tがした仕事）を求めよ．ただしTは伸びの量によらず一定とする.

(v) (ii)と(iv)の大きさが等しいことを示せ.

(vi) 時刻tにおいてx〜$x+dx$の部分に保持しているエネルギーが　$\frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}dx$　であることを用いて，各部分①②③内の微小部分dxがもつエネルギーを計算し，(ii)(iv)の結果と比較せよ.

注：この波形は，両端を固定した弦で発生することができない．両端を固定した場合は，弦のどの部分にも位置エネルギーが均等に分布する.

Q3　バネ定数kのバネに結ばれた質量mのおもりがx軸上で原点を中心とし振幅Aで単振動する.

(i) 角振動数ωを k と m で表せ.

(ii) $x(t),v(t)$をサイン，コサインを用いて表せ.

(iii) 時間の関数として，おもりの運動エネルギー$K(t)$と位置エネルギー$V(t)$を表せ.

(iv) おもりの力学的エネルギーEを求めよ.

(v) 時間平均した運動エネルギー$\langle K \rangle$，位置エネルギー$\langle \mathrm{V} \rangle$を用いて$E$を表せ.

(vi) サイン波のエネルギー密度の時間平均と比較せよ.

Q4　弦の一端($x=0$)を固定端とし$x\le 0$の部分を伝わる波に注目する．右に進む波が(i)$f_R(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$，(ii) $g_R(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$のとき，$x=0$で生じて左に進む反射波$f_L,g_L$および入射波と反射波の重ね合わせ$f,g$を求めよ.

Q5　弦の一端($x=0$)を開放端とし$x\le 0$の部分を伝わる波に注目する．右に進む波が(i)$f_R(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$，(ii) $g_R(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$のとき，$x=0$で生じて左に進む反射波$f_L,g_L$および入射波と反射波の重ね合わせ$f,g$を求めよ.

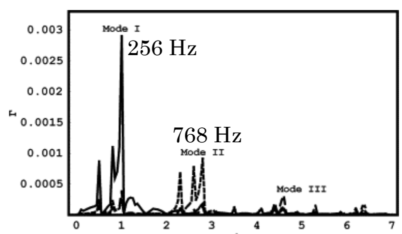
Q6　1 右図は張力をかけた金属線が基本振動数 120 Hz で振動している様子を示す.

(a)　360 Hz の 3 倍音で振動する様子をスケッチせよ.

(b)　張力を変えずに弦の長さを(i)2 倍，(ii) 半分にすると，基本振動数はどのように変わるか.

2　(a)　基本振動数の 2 倍で振動する金属線の様子をスケッチせよ.

(b) (a)について(i)金属線の振幅と位置の関係を述べよ，(ii)2 点間の距離と位相差の関係はどうか.



3 ギターの弦の張力を変え音叉の 256Hz に合わせた. 弦の中央付近を弾いた音を記録してコンピューターで解析した振動数スペクトルを右図に示す．512 Hz の振動数の音が含まれないのは何故か.

1

(1) $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

(2) $[T] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$, $[\rho] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}]^{-1}$, $\left[\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right] = ([\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2})^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{L}][\mathrm{T}^{-1}]$

(c)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right): \quad \text{まず,} \quad \frac{\partial y}{\partial x} \leftarrow \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}, \left[\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}\right] = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}]} = 1(\text{無次元}), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = \frac{\left[\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}\right]}{[\Delta x]} = \frac{1}{[\mathrm{L}]}$$

A2

(i) ②の部分が移動する速さ（波のエネルギーが移動する速さ）: c

(ii) y 方向の変位の速さ：$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{A}{L}c$，$dx$に含まれる質量: $dm = \rho dx$，運動エネルギーは$\frac{1}{2}(dm)u^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Ac}{L}\right)^2 \rho dx$

(iii) $|x| \ll 1 \to \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$より，$\sqrt{L^2 + A^2} - L = L\sqrt{1 + \left(\frac{A}{L}\right)^2} - L \simeq L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2\right) - L = \frac{1}{2}\frac{A^2}{L}$

(iv) 長さLに対する伸びが$\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}$だから，dxに対する伸びは$\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}\right)\left(\frac{dx}{L}\right)$．位置エネルギーは$T\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}\right)\left(\frac{dx}{L}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 T dx$

(v) 波の速さが$c = \sqrt{T/\rho}$となるので$\frac{1}{2}\left(\frac{Ac}{L}\right)^2 \rho dx = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\sqrt{T/\rho}\right)^2 \rho dx = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 \frac{T}{\rho}\rho dx = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 T dx$

(vi) ①③ではエネルギーが 0 となり，②では

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c\frac{A}{L}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A}{L} \quad \to \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}dx = \frac{1}{2}\left\{\rho\left(c\frac{A}{L}\right)^2 + T\left(\frac{A}{L}\right)^2\right\}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 (\rho c^2 + T^2)dx$$

となる．最右辺の第 1 項が弦の運動エネルギー，第 2 項が位置エネルギーである．両者は等しいので，エネルギーを$\left(\frac{A}{L}\right)^2 \rho c^2 dx$あるは$\left(\frac{A}{L}\right)^2 T^2 dx$と書いてもよい．

A3

(i) $\omega = \sqrt{k/m}$

(ii) $x(t) = A\cos\omega t$, $v(t) = -\omega A \sin\omega t$

(iii) $K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t$, $V(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$

(iv) $E = K(t) + V(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 =$ 時間的に変化しない

(v) $\langle \mathrm{K} \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$, $\quad \langle \mathrm{V} \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \langle \mathrm{K} \rangle$,

$E \underbrace{=}_{\text{時間的に一定だから平均しても同じ値になる}} \langle E \rangle = \langle \mathrm{K} + \mathrm{V} \rangle = \langle \mathrm{K} \rangle + \langle \mathrm{V} \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$: 振幅の 2 乗に比例，振動数の 2 乗に比例

(vi) サイン波のエネルギー密度 $\langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$に微小な長さ$dx$をかけ，その内部のエネルギー

$$dE = \langle u \rangle\ dx = \frac{1}{2}\rho dx\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\ dm\ \omega^2 A^2$$

となり，(v)の力学的エネルギーEとまったく同じになる．弦の 1 カ所に注目すると，その部分は単振動を行うのだから当然の結果だろう．

A4

左に進むサイン波は$h_L(x,t) = A\cos(kx+\omega t+\phi)$と表せる．この式は振幅が入射と同じである：エネルギーの損失がなく全部反射されるとしたので．入射波と同じ振動数である：系が線型で受動的（振動の源は隣接する部分しかない）．同じ波数である：同一の弦を伝わる波なので速さが入射波と同じであり，振動数が同じだから．

反射波を決める条件は：入射波と反射波の重ね合わせは，$x=0$における振幅が 0 となる．

(i) $f_R(0,t) = A\cos(-\omega t) = A\cos\omega t = -h_L(0,t) = -A\cos(\omega t+\phi) \to \phi = \pi$

$$f_L(x,t) = A\cos(kx+\omega t+\pi) = -A\cos(kx+\omega t), \qquad f = f_R + f_L = 2A\sin kx\sin\omega t$$

(ii) $g_R(0,t) = \mathrm{A}\sin(-\omega t) = -A\sin\omega t = -h_L(0,t) = -A\cos(\omega t+\phi) \to \phi = -\frac{\pi}{2}$ （$h_L = \mathrm{A}\sin(kx+\omega t+\psi)$として$\psi$を決めてもかまわない）

$$g_L(x,t) = A\cos\left(kx+\omega t-\frac{\pi}{2}\right) = A\sin(kx+\omega t), \qquad g = g_R + g_L = 2A\sin kx\cos\omega t$$

A5

反射波を決める条件は：入射波と反射波の重ね合わせは，$x=0$における接線の傾きが 0 となる．

(i) 左に進むサイン波は$h_L(x,t) = A\cos(kx+\omega t+\phi)$と表せる．

$$\frac{\partial}{\partial x}f_R(x,t) = -kA\sin(kx-\omega t),\ \ \frac{\partial}{\partial x}h_L(x,t) = -kA\sin(kx+\omega t+\phi)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f_R(x,t)\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial}{\partial x}h_L(x,t)\right|_{x=0} = 0 \to -kA\sin(-\omega t) = kA\sin\omega t = -(-kA\sin(\omega t+\phi)) \to \phi = 0$$

$$f_L(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx+\omega t),$$

$$f = f_R + f_L = A(\cos(kx-\omega t)+\cos(kx+\omega t)) = 2A\cos kx\cos\omega t$$

(ii) 左に進むサイン波は$h_L(x,t) = A\sin(kx+\omega t+\psi)$と表せる．

$$\frac{\partial}{\partial x}g_R(x,t) = kA\cos(kx-\omega t),\ \ \frac{\partial}{\partial x}h_L(x,t) = kA\cos(kx+\omega t+\psi)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_R(x,t)\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial}{\partial x}h_L(x,t)\right|_{x=0} = 0 \to kA\cos(-\omega t) = kA\cos\omega t = -(kA\cos(\omega t+\psi)) \to \psi = \pi$$

$$g_L(x,t) = -\mathrm{A}\sin(kx+\omega t)$$

$$g = g_R + g_L = A(\sin(kx-\omega t)-\sin(kx+\omega t)) = -2A\cos kx\sin\omega t$$

A6

1 (a) 右図 

(b) $\nu_0 = \frac{c}{2L}$より，弦長が2倍（半分）になると基本振動数が1/2の60 Hz（２倍の240 Hz）になる．

2 (a) 右図 

(b) (i)振幅は，両端と中央で0，端から1/4および3/4だけ離れた位置で逆位相・最大）となる．サイン関数の１周期分．

(ii)左半分と右半分では位相が180°異なり，それぞれの中ではどの位置の位相差も0である．

3．両側が固定端の弦の中央付近に腹がある振動モードは，基本振動の次が（第二高調波はなくて）第三高調波となるから．