複素指数関数 $e^{i\omega t}$

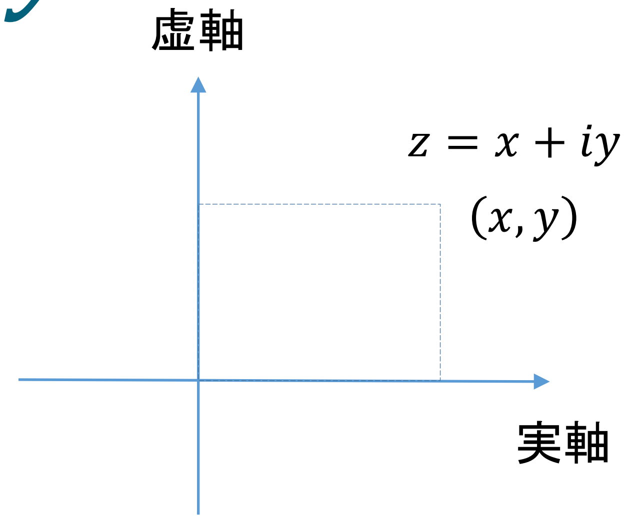
虚数単位：$i = \sqrt{-1}$

次の値を記せ

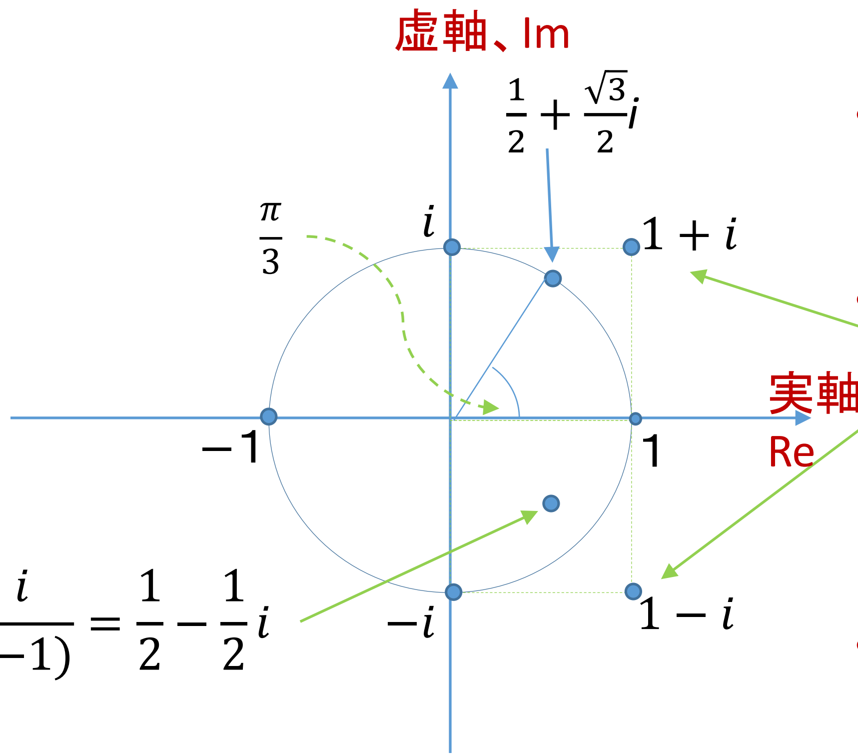
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -1 \times i = -i$
- $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$
- $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$

複素数: $z = x + iy$

- 複素平面（実軸、虚軸）
  - 点$(x, y) \Leftrightarrow z = x + iy$
- 複素平面上に点の位置を記入せよ
  - $0 = 0 + 0 \times i$
  - $1 = 1 + 0 \times i$
  - $i = 0 + 1 \times i$
  - $-i = 0 + (-1) \times i$
  - $1 + i$
  - $1 - i$
  - $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
  - $\frac{1}{1+i}$
  - $\frac{1}{1-i}$



複素平面上の位置



$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{1-(-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

- 絶対値

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

- 複素共役

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$$

z^*と書くことも多い

$$|z|^2=z\times\bar{z}$$

- 単位円

$$|z|=1$$

複素数の四則計算

- **実数倍：** $c \times z = c \times (x + iy) = cx + i\,cy$
- **和、差：** $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$
$$= (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

-------------以上は、2次元ベクトル (x, y)と同じ---------------

- **掛け算：** $z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + i\,y_2)$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
- **割り算：** $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- 興味深い見方： $z_1 \times \overline{z_2} = (z_1$と$z_2$の内積$) + i($外積$)$

$e^{i\theta}$

- **指数関数のマクローリン展開（定義）**

$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^{2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{n} + \cdots$$

$z = i\theta$を代入して次の展開と比較せよ。

- **サインおよびコサインのマクローリン展開**

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^{3} + \frac{1}{5!}\theta^{5} + \cdots$$

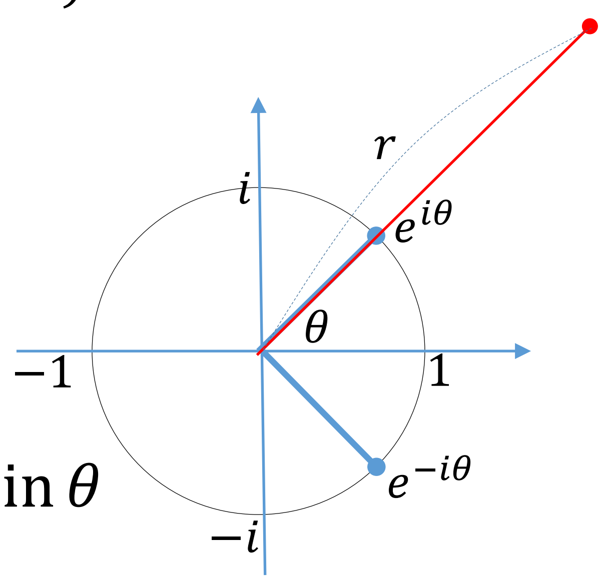
$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^{2} + \frac{1}{4}\theta^{4} - \cdots$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$: 単位円周上

θ: 実軸から反時計回りに測った角

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \overline{e^{i\theta}} \end{aligned}$$



どんな複素数も

と表せる

$$r\,e^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$

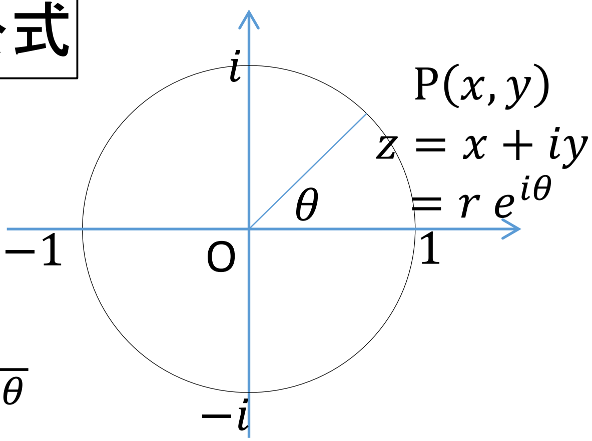
（コ）サイン関数と複素指数関数

基本的な性質

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{:オイラーの公式}}$$

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$　　:指数の規則

$$e^0 = e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i,$$
$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i, \quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$



(1) $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$

(2) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right], \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Im}[\mathrm{e}^{i\theta}]$

(3) $e^{i(\theta+2\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta} e^{2\pi i} = e^{i\theta}$

(4) $e^{i(\theta\pm\pi)} = e^{i\theta} e^{\pm\pi i} = -e^{i\theta}$

(5) $e^{i(\pi-\theta)} = e^{i\pi} e^{-i\theta} = -e^{-i\theta} = -\cos\theta + i\sin\theta$

(6) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\theta} e^{\frac{\pi}{2}i} = i\, e^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

(7) $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{i\theta} e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i\, e^{i\theta} = \sin\theta - i\cos\theta$

(8) $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1, \quad \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 = e^{i\theta} \cdot \left(e^{i\theta}\right)^* = e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$

（９）$\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

問　左の関係式(3)～(9)を，サイン･コサインの式に書き直せ．

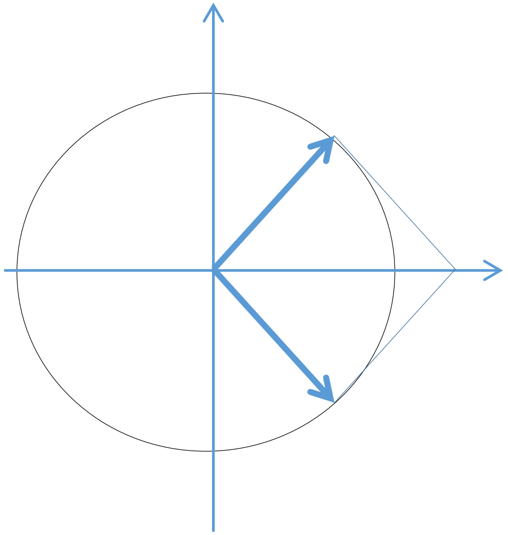
(コ)サイン関数と複素指数関数
時間的な変化

点Pが単位円上を一定の速さで回転するとき

$$\theta = \omega t,\ z(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

$\omega > 0 \rightarrow$ 反時計回り, $\omega < 0$ 時計回り

$e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos\omega t$: 実軸上の単振動
$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i\sin\omega t$: 虚軸上の単振動



問: 以下の式をサインとコサインの関係として書き直せ.

時間微分:

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}$$

時間積分:

$$\int \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + C$$

$e^{i\omega t}$の微分

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{i\omega\cdot(t+\Delta t)} - e^{i\omega t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{i\omega t}(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t}$$

$$= e^{i\omega t} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^{i\omega t} \times (i\omega)$$

$$\because \ e^z \equiv 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots \ \rightarrow \quad \mathrm{e}^{i\omega\Delta t} \simeq 1 + i\omega\Delta t$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}}$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\ \omega t\,, \qquad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t$$

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega(\cos\omega t\ + i\sin\omega t) = -\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t$$

$e^{i\omega t}$の積分

時間積分：不定積分 $\int f(t)dt = F(t)$は「$F(t)$をtで微分すると$f(t)$になる」ことを示す記号.

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + C}$$

確認:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$$

$$\int(\cos\omega t + i\sin\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{i}{\omega}\cos\omega t + C$$

$$= \frac{i}{i\omega}\sin\omega t - \frac{-1}{i\omega}\cos\omega t + C = \frac{1}{i\omega}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C$$

等速でない円運動（＊）

$z(t) = e^{i\theta(t)}$

等速（等角速度）:　$\theta(t) = \underbrace{\theta_0}_{\text{初期位相}} + \omega_0 t, \qquad \underbrace{\omega_0}_{\text{角速度}} = 一定$

非等速:　$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2!}\alpha t^2 + \frac{1}{3!}\beta t^3 + \cdots$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t + \frac{1}{2!}\beta t^2 + \cdots$$

サインとコサインの重ね合わせ

$$A\cos\omega t = \frac{\mathrm{A}}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \qquad B\sin\omega t = \frac{B}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$A\cos\omega t{+}B\sin\omega t = \frac{1}{2}(A - iB)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(A + iB)e^{-i\omega t}$$

$$|A - iB| = |A{+}iB| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

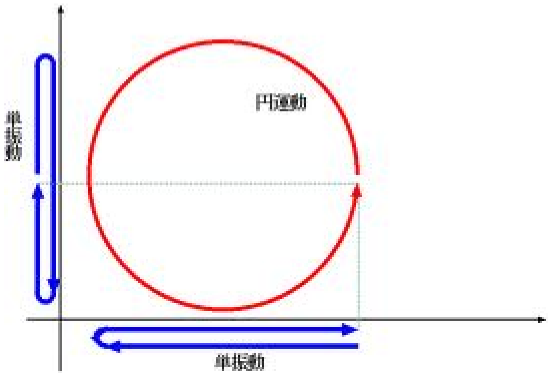
$A - iB = \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{i-\varphi},\ A + iB = \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{i\varphi}$なる$\varphi$を用いると

$$\begin{aligned} A\cos\omega t{+}B\sin\omega t &= \sqrt{A^2 + B^2}\left\{\frac{1}{2}e^{i(\omega t-\varphi\ )} + \frac{1}{2}e^{-i(\omega t+\varphi)}\right\} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \varphi\ ) \end{aligned}$$

単振動を表わす式
equations of simple harmonic motion

- 等速円運動する物体の位置
- 単振動 $\left(A\cos\left(\omega t+\theta\right), A\sin\left(\omega t+\theta\right)\right)$
  - 初期位相 θ , initial phase

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t+\theta)}\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[\tilde{A}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right], \qquad \tilde{A} = A\,e^{i\theta}$$



- 速度と加速度

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}[i\omega\tilde{A}\,e^{i\omega t}]$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}[(i\omega)^2\tilde{A}\,e^{i\omega t}]$$

$e^{i\omega t}$の利用(1)

- $\frac{dx}{dt} = A\cos(\omega t + \theta)$ を満たすx
  - $\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}[z]) = \mathrm{Re}\left[\frac{dz}{dt}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{A}\, e^{i\omega t}\right]$
    - $z = x + \boxed{iy}$
    - $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \boxed{i\frac{dy}{dt}} = A\cos(\omega t + \theta) + \boxed{i\,A\sin(\omega t + \theta)}$

- $\frac{dz}{dt} = \tilde{A}\, e^{i\omega t}$ を満たすzの実部
  - $z = \int \tilde{A} e^{i\omega t} dt = \frac{\tilde{A}}{i\omega} e^{i\omega t} = \frac{A}{\omega}(-\sin(\omega t + \theta) + i\cos(\omega t + \theta))$
  - $x = -\frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \theta)$, $y = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \theta)$

$e^{i\omega t}$の利用(2)

- $\dfrac{d^2x}{dt^2} = A\cos(\omega t + \theta)$ を満たすx
  - $\dfrac{d^2}{dt^2}(\mathrm{Re}[z]) = \mathrm{Re}\left[\dfrac{d^2z}{dt^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{A}\, e^{i\omega t}\right]$
    - $z = x + \boxed{iy}$, $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2} + \boxed{i\,\dfrac{d^2y}{dt^2}} = A\cos(\omega t + \theta) + \boxed{i\,A\sin(\omega t + \theta)}$

- $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \tilde{A}e^{i\omega t}$ を満たすzの実部
  - $z = \dfrac{\tilde{A}}{-\omega^2}e^{i\omega t} = -\dfrac{A}{\omega^2}(\cos(\omega t + \theta) + i\sin(\omega t + \theta))$
  - $x = -\dfrac{A}{\omega^2}\cos(\omega t + \theta)$, $y = -\dfrac{A}{\omega^2}\sin(\omega t + \theta)$

$e^{i\omega t}$の利用(3)

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta x = 0$ を満たすx
- $\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + \beta z = 0$ を満たすzの実部

  - $z = \tilde{A}e^{\lambda t}$を代入 $\rightarrow (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)\, Ae^{\lambda t} = 0 \rightarrow (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) = 0$
    - $\lambda = \frac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$
    - $\alpha^2 - 4\beta = -\omega^2 \rightarrow \lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm i\,\omega$
    - $z_{1.2} = \tilde{A}e^{-\frac{\alpha}{2}t}e^{\pm i\omega t}$

  - $x = A\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\omega t + \theta) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\{a\cos\omega t + b\sin\omega t\}$

$e^{i\omega t}$が利用できない場合

- 線形演算のとき
- xの２乗など，非線形な演算が含まれると，実部と虚部が混合する
- エネルギーは$\frac{1}{2}kx^2, \frac{1}{2}mv^2$の形になるので（そのままでは利用できない）