第６回　Q&A

問題１

Q. 「格子点について，どんな量をつくると波が見えるか」少し詳しく説明をしてください．

A. まず，ランダムな熱運動がない場合を考える．他の運動（たとえば波）もなければ，どの格子点（＝結晶格子をつくる原子がいる点のことだが「結晶格子をつくる原子」と読み替えてよい）もそれぞれに決まった安定な平衡位置で静止している．各格子点は（他の格子点から受ける力により）平衡位置を中心に振動することができる．１つの格子点が平衡位置からずれると，他の格子点に加わる力が変化するのでそれらが動く．１つの格子点が振動すると，他の格子点も振動する．こうして，格子点の平衡位置からのずれが波となって伝わる．

つぎに熱運動があるときを考える．どの格子点も平衡位置のあたりでランダムな運動をし，その平均の位置が平衡位置となる（実際はもうすこし複雑で，熱運動があると，多くの固体では平衡位置がずれて格子点の間隔が増大する．これが熱膨張である）．熱運動の有無にかかわらず，他の格子点との間隔が本来の平衡間隔からずれたときは力が作用し，その結果として波としての運動が生じる．　熱運動にくらべて波としての運動が遅いときは，波がないときの平均の位置＝熱膨張がなければもともとの平衡位置＝からのずれ（の平均）が波として伝わる．

問題２

Q. 「固体中の音波」のイメージがつかめません．

A.　「音波」という用語の用い方に少し乱れがある．もっとも厳密な意味で，音波は人間の耳で感じる音の直接の原因である「空気の粗密波（密度あるいは圧力の縦波）」を指す．人の耳で感じる音は周波数の範囲に限界があり，また強度にも限界があるが，空気の粗密波であれば，人間が感じようと感じまいと，音波という．ただし，可聴域を超える周波数の音波をとくに「超音波」という．

空気に限らず，液体や固体でも粗密波が伝わる．この波を「液体中を伝わる音波（液体の音波）」「固体中を伝わる音波（固体の音波）」と呼んでいる．液体や固体でも，空気と同じように，圧縮や膨張に対してもとにもどろうとする性質があるので，縦波が伝わる．波の媒体は異なっても波を生じるメカニズムは同様であるから，固体の音波を考えることに問題はない．地震の縦波も固体中の音波である（が，地震という現象に着目するときに音波と呼ぶことはない）．人工地震を起こして地中の構造を探査するときは，地震探査とも音波探査ともいう．

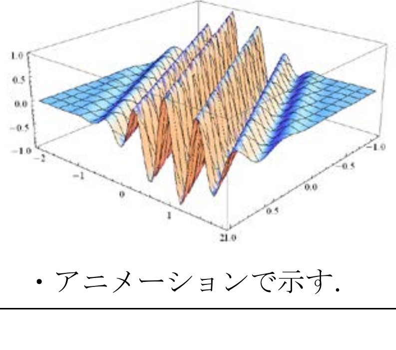
問題となるのは，固体を伝わる横波である．日本ではこの波も「固体中の音波」と呼ぶ人が多いような気がするが，英語圏ではそう呼ばない人が多いような気がする．ただし，楽器の弦などを伝わる横波は，それが音を発生する原因となっていても，音波ということは無いと思う．固体の横波は粗密波ではなく「ずれ」がもとに戻ろうとして起きる波であり，気体中では発生しない．液体中でも通常の意味では横波が存在しない（ことになっている）．

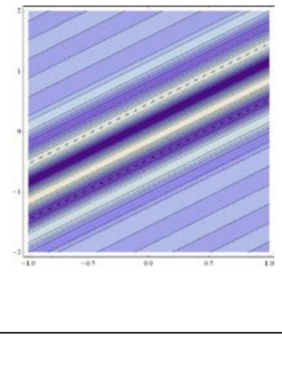
問題４

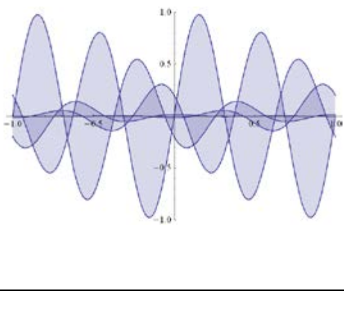
Q. 位置と時間の２変数関数は平面上に描けるのか？

A. 2 変数関数のグラフを表示する方法はいくつかある．

・俯瞰図　　等高線　　1 変数のグラフ（他の変数を固定）を重ね書き







・アニメーションで示す．

問題 5

Q. (2)の計算が理解できませんでした.

A. 偏微分法の復習をする必要がある．不明箇所の詳細な指定があれば解説する．

Q. (3)で「線形であること」を確認するためには，どのようなことを証明するか分かりませんでした.

A. 皆さんはすでに線型（形）代数学を勉強している．ベクトル$\vec{x}$に行列Aをかけると別のベクトル$\vec{y}$ができることを

$$\vec{y} = A\,\vec{x}$$

と表す．線型な演算が行われる代数を線型代数という．ここで線型な演算子が行列Aである．行列Aが

$$A\,(\alpha\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2) = \alpha A\vec{x}_1 + \beta\,A\,\vec{x}_2$$

という性質をもつことを指して A が線型の演算であるという．「線」は「直線」という意味で，グラフが直線となる関数の性質である「比例関係」の一般化したものが行列演算であることを指す.

●そこで，線型演算の先祖である 1 次関数 $\mathrm{y} = f(x) = kx$を見ると

$$f(a\,x_1 + b\,x_2) = k(a\,x_1 + b\,x_2) = a\,kx_1 + b\,kx_2 = af(x_1) + bf(x_2)$$

となり行列演算の線型性の定義と同様の関係が成り立つ．関数$f(x) = kx$のグラフが直線なので，これを線型の関係ということになった．$f(x)$とxが比例し，xを c 倍するとyも c 倍になり，比例関係が成り立つ．($y = f(x) = kx + c$では, 独立変数xと従属変数yの変化分について比例関係がなりたつ（$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k\,\Delta x$）ので，この関数も線型という)．

●比例関係のある演算では，「何倍する」「和をとる」としてから演算しても，演算してから「何倍する」「和をとる」としても，同じものになる：

$$f(a\,x_1 + b\,x_2) = af(x_1) + bf(x_2)$$

$$A\,(\alpha\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2) = \alpha A\vec{x}_1 + \beta\,A\,\vec{x}_2$$

●演算（あるいは関数，写像といってもよい）は，あるモノに対して別のモノを対応させる規則のことだから，関数に関数を対応させる操作も演算と考えてよい．たとえば，与えられた関数を定数倍する演算は

$$L_c[f(x)] = cf(x)$$

関数をx倍する演算は

$$L_x[f(x)] = x\,f(x)$$

である．L_cとL_xは線型演算である：

$$L_c[af_1(x) + bf_2(x)] = c\{af_1(x) + bf_2(x)\} = a\{cf_1(x)\} + b\{cf_2(x)\} = aL_c[f_1(x)] + bL_c[f_2(x)]$$

$$L_x[af_1(x) + bf_2(x)] = x\{af_1(x) + bf_2(x)\} = a\{xf_1(x)\} + b\{xf_2(x)\} = aL_x[f_1(x)] + bL_x[f_2(x)]$$

関数を 2 乗する演算は

$$L_{\mathrm{sq}}[f(x)] = \{f(x)\}^2$$

だが，これは線型ではない：

$$L_{\mathrm{sq}}[af_1(x) + bf_2(x)] = (af_1(x) + bf_2(x))^2 = a^2\{f_1(x)\}^2 + 2ab\,f_1(x)f_2(x) + b^2\{f_2(x)\}^2 \neq a\{f_1(x)\}^2 + b\{f_2(x)\}^2$$

線型演算の他の例は，微分演算である：

$$\frac{d}{dx}\{af_1(x) + bf_2(x)\} = a\frac{d}{dx}f_1(x) + b\frac{d}{dx}f_2(x)$$

また，積分も線型演算である：

$$\int\{af_1(x) + bf_2(x)\}\,dx = a\int f_1(x)\,dx + b\int f_2(x)\,dx$$

● 波動方程式の線型性について.

波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

を「関数fにある演算を行ったものが常に 0 である」と読み直す．この演算は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f=L_{\mathrm{w}}[f]$$

すなわち，fに対して，「fに$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$という偏微分を行って得たもの」を対応させる演算である．この演算L_{w}にはダランベール演算子という名がついており□という記号をつかうことがある：

$$\Box f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

このL_{w}(あるいは□)は線型演算子である．すなわち

$$L_W[af_1+bf_2]=aL_W[f_1]+bL_W[f_2]$$

が成り立つ．なぜなら，1 階の微分演算$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$や$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}$は線型である．（微分によらず）線型演算を 2 回繰り返す演算$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$や$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$も線形である．線型演算の定数倍$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$も線形である．線型演算どうしの（和や）差$\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$も線形である．

こうして$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$は線型な演算である．$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$が線形であることを，直接に計算して示すには，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(af_1+bf_2)=a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f_1+b\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f_2$$

をいう．

●こうして「波動方程式の右辺に現れるダランベール演算子は線型である」のだが，同じ内容を「波動方程式が線型である」ともいう．演算子の線形性という概念を使わずに「波動方程式が線型であること」を直接に示すには，同じ波動方程式の２つの解f_1とf_2があるとき，$f=a\,f_1+b\,f_2$も解であることを示す：

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=0 \text{ と } \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0, \qquad \text{ただし} f=a\,f_1+b\,f_2$$

以上.