第７回

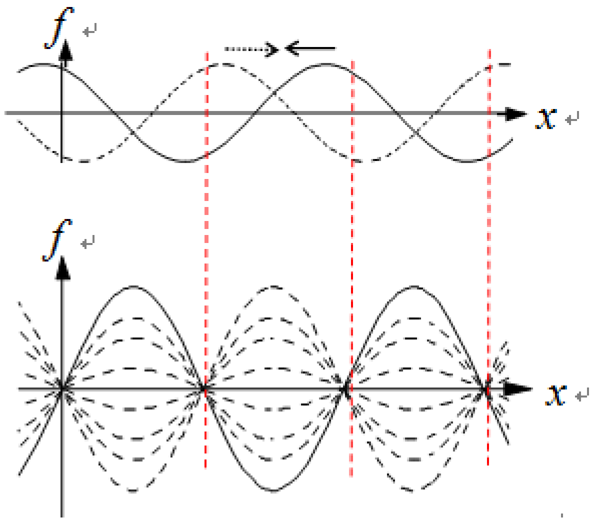
問題１

Q.　定在波と定常波は同じものですか？

A.　はい．

Q.　解答のグラフの特徴がよくわかりません．説明をお願いします．

電磁気学の教科書を持っていたら図 15.2 の説明を参照．



　上図と下図はともにある時刻における波の空間的な変化の様子を示したものである．

　上図は，２つの波が別々に重ねて描いたもの．点線の波は右側に進む波である．実線の波は左側に進む波である．両方とも波長が同じ，振幅が同じ．両方とも同じ波動方程式の解なので同じ速さで進み，波長が同じだから，振動数も同じ．この時刻では赤点線の位置で２つの波の変異の大きさが等しく符号が反対となる．

　下図は，２つの波の重ね合わせの結果（したがって，目に見える波の様子）を示す．赤点線の位置では２つの波が同じ大きさで逆向きの変位であるため，重ね合わせの結果が０となる．上図の２つの波は同じ速さで逆向きに進むので，時間が経過したときにも，この赤点線の位置では，逆向き等大の変位となる．したがって，赤点線の位置では常に振幅が０となる．この位置を定在波の節という．節と節の中間には振幅が最大となる位置がありこれを定在波の腹という．腹の位置も移動しない．隣り合う腹は位相がπことなり，正負逆向きの振動をする．

　定在波の振動数はもとの２つの波の振動数と同じである．波長（位相が２πだけ異なる２点間の距離）も同じである．振幅は２倍になる．

問題２

Q.　解答の式の変形を詳しく説明してください．

A.　$f = f_1 + f_2 = A\,e^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = Ae^{i\left\{\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)+\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\right\}t} + A\,e^{i\left\{\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\right\}}$

最後の等号は$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$と$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$ が常になりたつことによる．

$e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$を共通因子としてくくり出すと

$$f = A\,e^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = Ae^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}\left(e^{i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t} + e^{-i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t}\right)$$

となる．最右辺にオイラーの式　$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) +$ その複素共役 $= 2\cos\theta$ を用いて

$$f = A\,e^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = Ae^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}\left(e^{i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t} + e^{-i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t}\right) = Ae^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}\,2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$$

$$=\left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right] \times e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$$

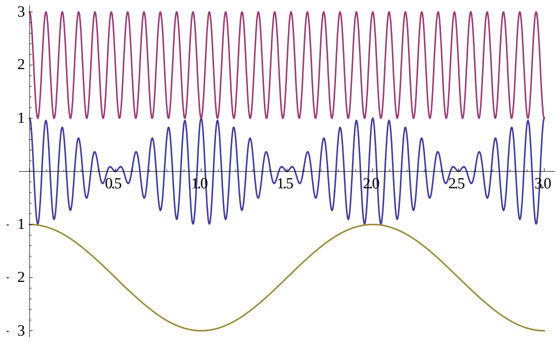
第１因子の$\left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]$は実数だから

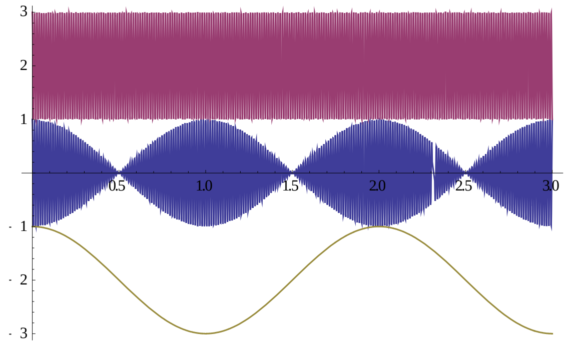
$$f = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t + i\left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t,$$

$$\therefore\ \mathrm{Re}[f] = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

Q 解答のグラフの特徴がよくわかりません．説明をお願いします．

A.解説のためにグラフを改める．上図は$\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$，中図は$\left[\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$，下図は$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$である．重ね合わせる前の２つの波の平均の振動数をもつ波（上図）が，差の振動数の1/2 の振動数のコサイン波（下図）で振幅変調を受けてうなりが生じる（中図）．解答としてはRe[f]の図（中図）だけを描けばよい．この図は$\omega_1 = 2\pi \times 11$ rad/s（$\nu_1 = 11$ Hz），$\omega_2 = 2\pi \times 10$ rad/s（$\nu_2 = 10$ Hz）として描いたが，$\nu_1 =400$ Hz，$\nu_2 = 399$ Hzのときは，振幅変調の様子をグラフで示そうと思うとキャリアの振動の様子が速すぎて描けない．





Q.「うなりの角振動数が，変調の角振動数$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$の倍になる」のがわかりませんでした．

A. 「うなり」が聞こえる」ときは音の強さが周期的に変化するのが聞こえる．うなりの角振動数とは，「音の強さ」の周期的な変化の角振動数のことである．音の振幅が

$$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$$

のようになるとき，音の強さは

$$\left|\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right|$$

のようになるので，振動数が

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\times 2 = \omega_1-\omega_2 \quad (\omega_1 > \omega_2)$$

となる．上のQの図を見るとその意味が明らかだろう．

Q．$\frac{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\frac{1}{2}(k_1-k_2)}$は，何を計算しているのか，なぜ速さの計算になるのか，わかりません．

A. 一般に，波の速さがcのとき（波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，角振動数 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，$\omega = ck$を念頭においている），右側に進む単振動の波は

$$\cos(kx-\omega t) = \cos\left(k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right) = \cos(k(x-ct))$$

と書ける．波形を表す関数の引数が$(x-ct)$というまとまりだけで現れるとき，速度 c で移動する人が見る波形は変化しない（凍り付いて動かない）．したがって，このとき止まっている人がみる波の速さが$c=\omega/k$となる．

考察の対象は

$$\cos\left[\frac{1}{2}(k_1-k_2)x-\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right] = \cos(\Delta k\, x-\Delta\omega\, t) = \cos\left(\Delta k\left(x-\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right)$$

ただし　$\Delta k = \frac{1}{2}(k_1-k_2)$，　$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$と描き直した

という波である．以上により，この波の速さは$\Delta\omega/\Delta k$を計算すると求まることが分かった：

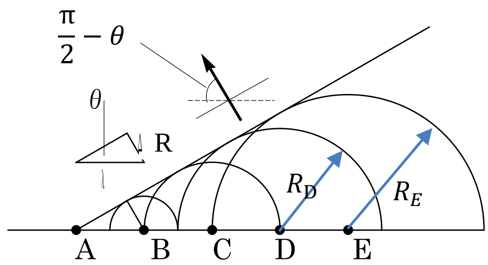
$$\frac{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\frac{1}{2}(k_1-k_2)} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{ck_1-ck_2}{k_1-k_2} = c$$

問 3

Q. ホイヘンスの原理を使って新しい波面をつくるやりかたが分かりません.

A. ホイヘンスの原理は，きちんとした数学表現にすることができる（フレネル回折）のだが，数学を使わない直感的な理解で十分である．琉球大学の前野先生のページがわかりやすいかもしれない：
http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/cgi-bin/pukiwiki/index.php?%C7%C8%C6%B0%CF%C02008%C7%AF%C5%D9%C2%E813%B2%F3

Q. $\boldsymbol{\Delta R = \lambda \times \frac{\Delta\phi}{2\pi}}$が理解できませんでした.



A. 図のように，波源に左から順にA，B，C，D，E，と名前をつける．AよりBが，BよりCが, CよりDが，・・・，振動の位相が進んでいる．たとえば，Eから出た球面波の位相$\frac{\pi}{2}$の波面が半径R_Eの球面をつくっているとき，Dから出た位相πの波面はそれより小さな半径R_{D}の波面をつくっている．同じ場所に同じ位相の波が来て重なると「山と山」というように強めあい，位相が異なる波が重なると互いに打ち消しあって消える．上図の状況ではAを通る斜線で表される面が「強めあった結果残った」波面である．Aでは，まさに今，位相πの振動が起きていて，まだAがつくる波は広がっていない．

本問で与えた数値は，位相差 π で振動するAとBの間隔が1波長である．$R_{\mathrm{B}} = \Delta R$は，位相が π 変化する間に波が進む距離であり，1/2 波長に等しい．そうすると，Aを通る斜線のなす角は，サインの値が 1/2 となるので，

$$\sin\theta = \frac{\Delta R}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{6}$$

波はこの波面と垂直に進むから，波源が並ぶ直線となす角が$\frac{1}{3}\pi$の方向である．