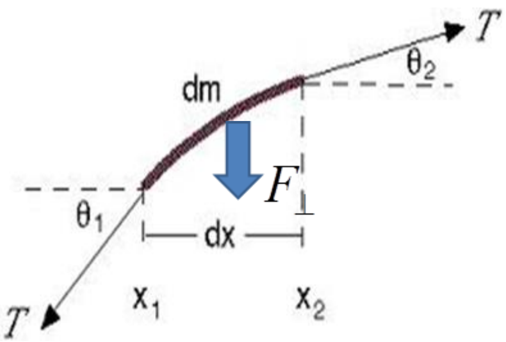
弦の横波と共鳴

要点と復習

波動方程式

- 仮定:弦の変形は小さく曲がり方が少ない

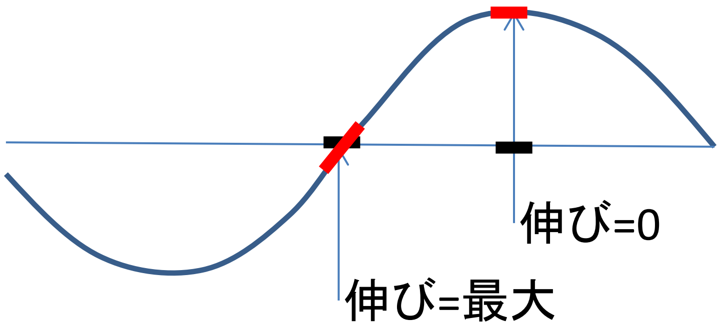
- 弦の一部分の運動方程式
  - 力: 両側に働く張力の垂直成分
  - 加速度: 変位の加速度
  - 質量: 密度×長さ(伸びは考慮しない)



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

エネルギー密度

- 弦の振動
  - 運動エネルギー＋位置エネルギー



- 位置エネルギー（張力と弦の伸び）
  - 張力:　　　　　弦を通して一定
  - 弦全体が一様に伸びる
  - ある部分の伸び　：x方向の単位長さ×弦の傾斜の2乗に比例

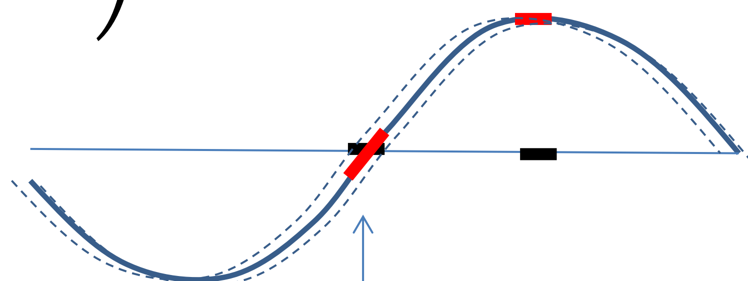
- エネルギー密度

$$\frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}$$

サイン波（進行波）のエネルギー密度

$$u = \left(\frac{1}{2}\rho(A\omega)^2 + \frac{1}{2}T(Ak)^2\right)\sin^2(kx - \omega t)$$

$$= \rho\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$



変位＝ 0の位置：　　位置エネルギーと運動エネルギーが最大

変位＝ 最大の位置：　　　　　　　　〃　　　　　　　　0

定在波のエネルギー密度

- $y(x,t) = A\cos kx \cdot \cos\omega t$

  $$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos kx \sin\omega t\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -kA\sin kx\cos\omega t$$

- $u = \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}$

  $$= \frac{1}{2}\rho(\omega A)^2\cos^2 kx\ \sin^2\omega t + \frac{1}{2}T(kA)^2\sin^2 kx\cos^2\omega t$$

- 腹（$\cos kx \to \pm 1$）: 運動エネルギーが最大
- 節($\cos kx \to 0,\ \ \sin kx \to \pm 1$): 位置エネルギーが最大

波のパワー

エネルギー密度の時間平均

$$< u > = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

波とともに運ばれる

パワー

$$< P > = < u > \times c$$

$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \times c = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2}\sqrt{T\rho}\,\omega^2 A^2$$

振幅の2乗と振動数の2乗に比例

両固定端の弦の
基準振動モード

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\omega_n t\,, n = 1,2,3,\cdots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

基準振動モード