

2. 波動光学（ガウスビーム）による波面とスポットサイズの追跡

z 軸上を伝わる光電場の振幅が、軸から r だけ離れた位置で

$$u(r, z) = \frac{A_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w(z)^2}\right] \times \exp\left[-i\left(kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right] \quad \dots(2.1)$$

と表される時、これを(最低次の)ガウスビームと言う。ただし、波数 k 、 z におけるスポットサイズ w 、波面（等位相面）の曲率半径 R は

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \quad R(z) = z \left[1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right], \quad \text{ここで} \quad z_0 \equiv \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

である。(2-1)では、 z 軸上の原点で、スポットサイズが最小かつ曲率半径が無窮大となるようにしてある。必要に応じて原点をずらしてよい。 w_0 は最小のビーム半径でビームウエストの大きさという。

波長 λ とビームウエストの大きさはガウスビームを決めるパラメータである。いいかえると、ガウスビームでは、 k と w_0 の大きさと $w(z) = w_0$ となる(ビームウエストの)位置 z が決まると、自由空間における性質（振幅強度の定数倍を除く）が決まってしまう。

問 1. (2-1)において、

- A) r 方向の電場強度はどんな分布をもつか。
- B) z が十分に大きいとき、等位相面が原点を中心とする球面となることを示せ。
- C) $z \rightarrow \infty$ としたとき、ビームの開き角 $\frac{w(z)}{z}$ はどのようになるか。それは波がどんな大きさの開口を通ったときの回折角に一致するか。焦点から十分離れたところで測定したビームの開き角から w_0 を求める手順として意識せよ。
- D) $w(z)$ を z の関数としてグラフに表し、幾何光学からのずれが顕著となる範囲がどの程度かを考えよ ($z_0 \equiv \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ を意識せよ)。
- E) 平行光線を凸レンズでしぼったときの焦点では、波面の曲率半径はどんなか？

問 2. (a) 球面鏡を組み合わせた共振器をもつレーザーから出る波面は、近似的にガウスビームとなる。その理由を考えよ。(b) 曲率半径 2m の凹面鏡と平面鏡を 1m 離して対向させた共振器をもつレーザーが波長が 633 nm の光を放出する。平面鏡上のスポットサイズはどの程度か、凹面鏡上のスポットサイズはどの程度か、またビームの開き角はどの程度か。

光学的なエレメントを通過した後に、波面の曲率とスポットサイズがどう変化するかを簡単に計算する手法がある。それにはガウスビームのパラメータ $w(z)$ と $R(z)$ から、複素数 $q(z)$ を

$$\frac{1}{q} \equiv \frac{2}{ik} \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) = \frac{1}{R} - \frac{2i}{kw^2} \quad \dots(2.2)$$

で定義する。この量を用いると、以下の間で学ぶように、幾何光学の ABCD 行列で表されるエレメントを通過する前後の値をそれぞれ添え字 1、2 で表したとき

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad \dots(2.3)$$

となる。これは、波面の曲率半径と光線の傾きが、スポットサイズと光線の軸からの距離が対応することを考えると証明できる。

問 3.

- (i) 焦点距離 f の薄いレンズを通過するとき、スポットサイズは変わらないが、 $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$ と変換されること、従って q に虚部がある場合も $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$ となることから、レンズの ABCD 行列要素に対する(2.3)の関係を確かめよ。
- (ii) 自由空間でのガウスビームの伝播が(2.1)で規定されることを念頭に、 $\text{Re}[q] = z$ であることを証明し、自由空間の ABCD 行列要素に対する(2.3)の関係を確かめよ。

問 4.

- (i) 波長 λ のガウスビームを集光したところ、焦点位置でスポットサイズが w_0 であった。この位置に新たに焦点距離 f の凸レンズをおいたとき、あらたな焦点はどこにでき、その位置におけるスポットサイズはどんな値か。幾何光学では、この問題を扱えるだろうか。
- (ii) 波長 $0.8 \mu\text{m}$ の平行光を焦点距離 5mm のレンズで集光し、焦点位置で $1 \mu\text{m}$ 程度の広がり(スポットサイズを $0.5 \mu\text{m}$ とせよ)をもつようにしたい。レンズの口径はどの程度でなければならないか。
- (iii) 次に、レンズから 1mm 先に比屈折率が 1.5 の層があったとすると、焦点の位置や焦点でのスポットサイズにどれだけ変化が出るか。

