3.屈折率

ある振動数の光は，真空中から物質中に入射してもその振動数を変えずに進む．振動数が変わらないので，物質中で伝播速度が変わるとき波長（したがって波数）が変わる．

物質（誘電体）中を進む光の波は、物質を構成する原子や分子と相互作用するためにその位相速度vは真空中の値cより小さい。位相速度の変化を屈折率$n = c/v$で表す。光と構成原子が強く相互作用するほどこの効果は大きくなり、屈折率が大きくなる（共鳴点付近では異常な振る舞いが起きる）。可視光に対して透明な物質も、紫外光とは強く相互作用する。同じ物質でも光の波長によって屈折率が異なる。光の屈折率が波長（または振動数）により変化するとき「屈折率に分散がある」という．

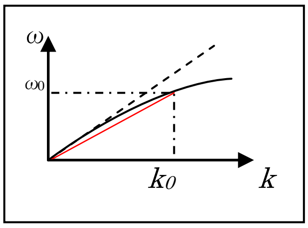
真空中では分散がない．真空中の光の波長λと角振動数ωの関係は，光速度 c を用いて

$\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda / c} = c\dfrac{2\pi}{\lambda}$ である（中辺分母は振動の周期に等しい：1 波長進むのに要する時間)．

上式を波数$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$を用いて

$$\omega = kc$$

と書く（波数は，単位距離に含まれる波の数 1/λを 2π倍したものであり，伝播方向に単位距離だけ離れた 2 点の同一時刻における位相差を表す）．真空中では分散がないから，横軸を k とし縦軸をωとして分散関係をグラフに表すと直線(図の破線)になる．



分散があるとき，k とωの関係は直線からずれる（図の実線のカーブ）．ω(k)のグラフを「分散曲線」という．この物質中で角振動数ω_0の光の波数がk_0なら，この振動数における位相速度は$v = \omega_0 / k_0$すなわち赤線の傾きで与えられる．

単一振動数（単振動）の光は同じ振幅を保ったまま無限に持続する．様々な振動数の光（フーリエ成分）を重ねあわせると様々な波形の光を作ることができる．真空中ならば分散がなく，どの成分も同じ速度で進み重ね合わせの状況は常に変わらず，波形は変化しない．パルスであれば，パルス波形が不変のまま位相速度で進む．もちろんそのピーク位置も同じ位相速度で進む．

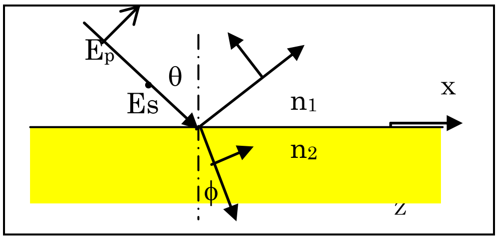
一方，屈折率に分散がある媒質では，異なる振動数成分の光が異なる速度で進むため，伝

播にともない，重ね合わせのときの成分間の位相関係が変化する．このため，伝播する間にパルスの波形は変化し，パルスが進む速さを郡速度（位相速度とは異なる）と言う．

郡速度は$v_g = d\omega/dk$で与えられる．位相速度の関係式と郡速度の定義から$v_g = v + v\dfrac{dv}{dk}$である。

問１．　2 つの成分をもつ合成波　$\varsigma = ae^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + ae^{i(k_0+\Delta k)x-(\omega_0+\Delta\omega)t}$　を、搬送波が振幅変調を受けたものとみなす．この波の伝播の様子を物理的に考察することにより，搬送波の位相速度がω_0/k_0、郡速度が$\Delta\omega/\Delta k$であること（極限をとればｄω/dk　となる）を示せ。ただし、Δk,Δωが k_0,ω_0 に比べて小さいとする。

問２．　波長 1μm で屈折率が 1.5、波長が 300 nm 短くなると屈折率が 0.005 だけ増大する物質がある。1 μm 付近での群速度を求めよ。この波長帯で、パルス幅が$10^{-12}s$の光がこの媒質を 1m 伝わると、パルス幅はどれほど広がるか。真空中の光速度を 3x10^8 m/ s とせよ。



伝送線路のインピーダンス不整合と同様に、屈折率の異なる誘電体の界面では光の屈折と反射が起きる。

屈折の法則は$\dfrac{\sin\theta}{\sin\phi} = \dfrac{n_2}{n_1}$であり、光電場(特に p 波に対しては、図のような基準の電場ベクトルの方向に注意)の振幅反射率($r = E_{ref}/E_{in}$)は

$$r_p = \frac{\tan(\theta-\phi)}{\tan(\theta+\varphi)}、\quad r_s = -\frac{\sin(\theta-\phi)}{\sin(\theta+\phi)}$$

である。特に垂直入射のときは$r_s = -r_p = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$である。振幅透過率($t = E_{trn}/E_{in}$)は

$$t_p = \frac{2\cos\theta\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)}、\quad t_s = \frac{2\cos\theta\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}$$

である。特に垂直入射のときは$t_s = t_p = \dfrac{2n_1}{n_1+n_2}$である

屈折の式を見ると、n1>n2 では$\sin\theta_c = n_2/n_1 \equiv 1/n$のときに屈折波が存在しない(臨界角、全反射)。n を比屈折率とよぶ。全反射では位相の変化が入射角にともなって変化する。その効果まで含めて

$$r_p = \frac{\cos\theta + in\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}{\cos\theta - in\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}、\quad r_s = \frac{n\cos\theta + i\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}{n\cos\theta - i\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}$$

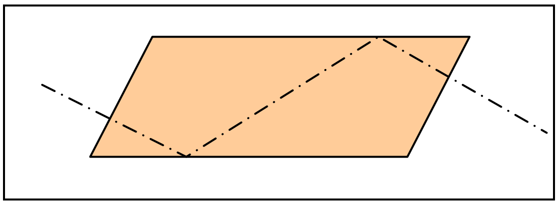
となる。

全反射の場合でも、入射波は界面を越えてわずかにしみだし（エバネッセント波）、この光波の電場は

$$E = A\exp\left[-k_2\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}\cdot z\right]\exp\left[\left(-ik_2 n\sin\theta\right)x\right]$$

である。ただし、k_2 はしみだした媒質中での（進行波がもっている）波数である。

問３． フレネルの斜方プリズム（頂角 55.5 度）という光学素子は図のような構造である。比屈折率が n=1.52 であるとして、直線偏光の光がこのプリズムに垂直入射して通過すると、どんな偏光状態となって射出するか。



問４． GaAs を屈折率が 3.6 の誘電体であるとする。その自然へき開表面に垂直入射する光の何%が表面で反射されるか。逆に、この結晶内部から表面から垂直に射出された光が空気中で 1mW のとき、内部での光のパワーはどれだけか。