A1_光線

問１：

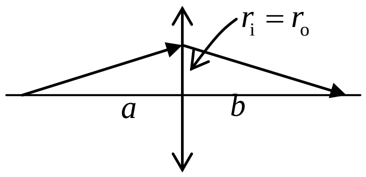
自由空間：与えられたＡＢＣＤ行列に対して

$$\begin{pmatrix} r_\mathrm{o} \\ r'_\mathrm{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} \\ r'_\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} + d \cdot r' \\ r'_\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

という計算を実行すれば明らかなように，ｄだけ進む間に光線は直進するので光軸となす角度が保たれ（第 2 要素），光線が光軸から離れる様子が $r_\mathrm{o}(d) = r_\mathrm{i} + r'_\mathrm{o} \cdot d$ という（ｄを変数とする）直線の式で表されることを表している（第 1 要素）。

レンズ：

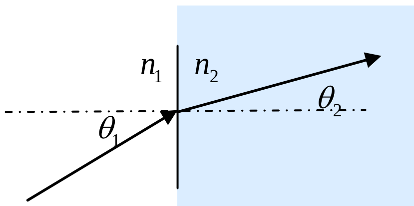
$$\begin{pmatrix} r_\mathrm{o} \\ r'_\mathrm{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} \\ r'_\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} \\ \dfrac{-r_\mathrm{i}}{f} + r'_\mathrm{i} \end{pmatrix}$$




である。レンズの厚みが無視できるものとする。そうするとレンズ通過によって光線の位置は変わらないので $r_\mathrm{o} = r_\mathrm{i}$ （第 1 要素）。一方，レンズの公式 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$ の両辺に，光線がレンズ通過する時の位置 $r_\mathrm{i}$ をかけると $\dfrac{r_\mathrm{i}}{a} + \dfrac{r_\mathrm{i}}{b} = \dfrac{r_\mathrm{i}}{f}$ である。 $r'_\mathrm{i} = \dfrac{r_\mathrm{i}}{a}, r'_\mathrm{o} = -\dfrac{r_\mathrm{i}}{b}$ の関係を用いると $r'_\mathrm{i} - r'_\mathrm{o} = \dfrac{r_\mathrm{i}}{f}$ のように書き直せる。これを移項して $r'_\mathrm{o} = -\dfrac{r_\mathrm{i}}{f} + r'_\mathrm{i}$ である（第 2 要素）。

屈折：

$$\begin{pmatrix} r_\mathrm{o} \\ r'_\mathrm{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} \\ r'_\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\mathrm{i} \\ \dfrac{n_1}{n_2} r'_\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

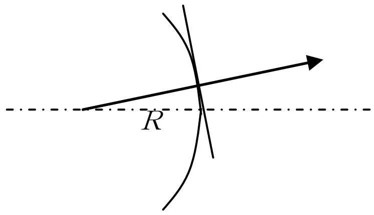



屈折した位置で光線の位置が変わらず（第 1 要素），角度だけが変わる。屈折率 $n_1$ から $n_2$ の媒質へ平面の境界を通過して入射する光線について，入射角（境界面の法線から測った角度）と屈折角の間にはスネルの法則 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ 成り立つ。小さい角度に対しては，それをラジアンで表すとき，$\sin\theta \approx \theta$ なる近似が成り立つので，スネルの法則を $\dfrac{r'_\mathrm{i}}{r'_\mathrm{o}} = \dfrac{n_2}{n_1}$ と書くことができる。これを書き換えて $r'_\mathrm{o} = \dfrac{n_1}{n_2} r'_\mathrm{i}$ となる（第 2 要素）。

球面の境界での屈折：第２要素に注目するとＡＢＣＤ行列が与える関係は

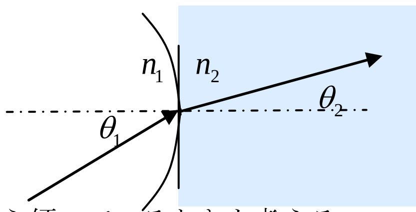
$$r_o' = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 R}\right) r_i + \frac{n_1}{n_2} r_i' = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{r_i}{R} + \frac{n_1}{n_2} r_i' = \frac{r_i}{R} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(r_i' - \frac{r_i}{R}\right)$$

となっている。もし$r_i$の位置に入射する光線が球面の中心から発したものなら，境界面に「垂直」な入射だから，そのまま屈折せずに通過する。そこで上式を見ると，境界面に「垂直」な入射という条件は$r_i' = \dfrac{r_i}{R}$で表されから




$$r_o' = \frac{r_i}{R} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(r_i' - \frac{r_i}{R}\right) = \frac{r_i}{R}$$

となり確かにこの状況を表している。今度は，光軸上（$r_i = 0$）で境界に入射した光が光軸から傾いている場合を考えると，これは先のスネルの法則のＡＢＣＤ行列をそのまま適用できるはずである。確かに




$$r_o' = \frac{r_i}{R} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(r_i' - \frac{r_i}{R}\right) = 0 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)(r_i' - 0) = \frac{n_1}{n_2} r_i'$$

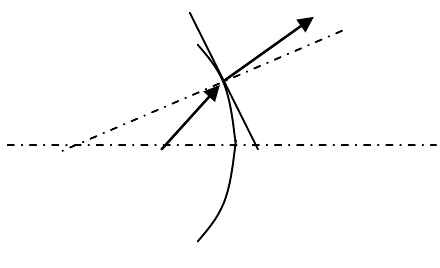
である。最後に$r_i$の位置で入射する光線が「垂直」な入射から傾いているときを考える。近軸光線でなく傾斜の角度が大きいときは三角関数の加法定理を使う必要があるが，ここでは幸いどれも小さな角度なので

$$\sin(\alpha+\beta) \approx \alpha+\beta,\ \tan(\alpha+\beta) \approx$$

などの近似が成立つ。このとき，ベースになる傾き$r_i' = \dfrac{r_i}{R}$に，それを基準とした屈折による傾きの変化を加算すればよい。ベースの「垂直」入射の傾きから測った相対的な入射角は$\left(r_i' - \dfrac{r_i}{R}\right)$だから，これにスネルの法則を適用して$\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)\left(r_i' - \dfrac{r_i}{R}\right)$が相対的な屈折角である。よって絶対的な入射の傾き$r_i'$に対する絶対的な屈折光線の傾きは

$$r_o' = \frac{r_i}{R} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(r_i' - \frac{r_i}{R}\right)$$

となる。

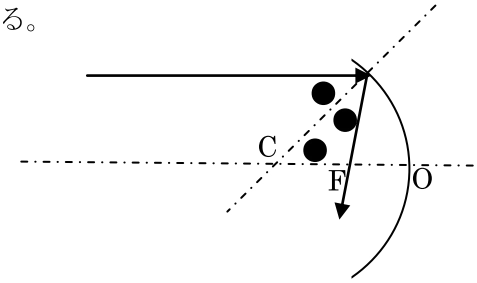


球面鏡：

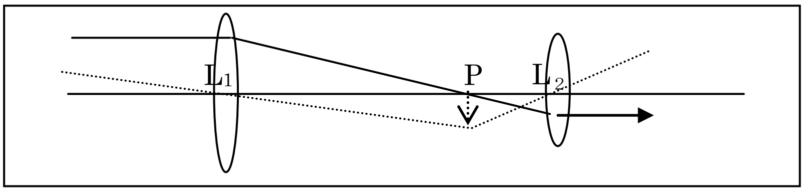
球面鏡の光軸と平行な光線が$r_i$の位置に入射したとき，その位置における球面の法線に対

して入射角と反射角が等しくなるように反射が起きる。図を参照すると，反射光線が光軸と交わる点Ｆを頂点とする２等辺三角形がある。近軸光線の近似で$r_1$が０に近づくと，Ｆは球の中心Ｃと鏡の中心Ｏを２等分する位置に近づく。こうして、半径$R$の球面鏡は、近軸光線に対して、焦点距離$R/2$のレンズと等価になる。

あとは、レンズのABCD行列を流用する。ただし光線の進行方向が逆転することを取り込んで解析しなければいけない。




問２：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1-d}{f_1} & d \\ -\dfrac{f_1+f_2-d}{f_1\cdot f_2} & \dfrac{f_2-d}{f_2} \end{pmatrix}$となる。




この装置はコリメータと呼ばれ、光のビームを平行光線のまま太さを変えるために使われる。凸レンズを二枚組み合わせて、平行光線$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$が$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$になればビーム径が半分になるのだから

$$\begin{pmatrix} \dfrac{f_1-d}{f_1} & d \\ -\dfrac{f_1+f_2-d}{f_1\cdot f_2} & \dfrac{f_2-d}{f_2} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \dfrac{f_1-d}{f_1} \\ -\dfrac{f_1+f_2-d}{f_1\cdot f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この第二要素から$\underline{d = f_1 + f_2}$が得られ、さらに第一要素から$2\dfrac{f_1-(f_1+f_2)}{f_1} = -2\dfrac{f_2}{f_1} = -1$となる。よって$\underline{f_1 = 2f_2}$となる。

このコリメータを通して十分遠方の物体を見ると２倍に拡大されて見える。十分遠方の物体の像は$L_1$の焦点位置の近くにできる。レンズ中心を通過する光（図の点線）が軸となす角が物体の見かけの大きさである。$L_1P : L_2P = 2 : 1$なので、三角形の相似から、$L_2$から出る光が軸となす角が倍になる。こうして２倍の拡大を得る。

問３：

(1) $$\begin{pmatrix}1 & d\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-1/f_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-1/f_1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & d\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{f_1-d}{f_1} & d\\-\dfrac{f_1+f_2-d}{f_1\cdot f_2} & \dfrac{f_2-d}{f_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{f_1f_2-df_1-2df_2+d^2}{f_1f_2} & \dfrac{2df_2-d^2}{f_2}\\\dfrac{d-f_1-f_2}{f_1f_2} & \dfrac{f_2-d}{f_2}\end{pmatrix}$$

が１周期分の行列である。

(2) １周期すすめたとき，上のＡＢＣＤ行列の成分を使って，$r_{s+1}=Ar_s+Br'_s$である。これを傾きについて解くと$r'_s=\dfrac{1}{B}\left(r_{s+1}-Ar_s\right)$となる。この関係式を次の周期にずらして見ると$r'_{s+1}=\dfrac{1}{B}\left(r_{s+2}-Ar_{s+1}\right)$となる。一方，もとの周期について $r'_{s+1}=Cr_s+Dr'_s$の関係があるから，これに$r'_{s+1}$と$r'_s$を代入して，軸からの距離だけで表すと

$$\underline{r_{s+2}-(A+D)r_{s+1}+\left(AD-BC\right)r_s=0}$$

に至る。これは２階の定形数線形微分方程式に対応する差分方程式であり，指数関数あるいは三角関数の解を持つだろうということが予想される。

(3) 上の差分方程式を解くとき，線形微分方程式と同様に特性方程式を考えるのが楽である。$r_s=r_0e^{\lambda s}$の形（問題文中では$r_s=r_0e^{iks}=r_0\exp\left(ik\cdot s\right)$としているが、まず$k$が実数となる場合に限定することなく複素数λを用いて$r_s=r_0e^{\lambda s}$の形を想定する）を仮定して代入すると

$$\underline{r_0e^{\lambda(s+2)}-(A+D)r_0e^{\lambda(s+1)}+\left(AD-BC\right)r_0e^{\lambda s}=r_0e^{\lambda s}\left(e^{2\lambda}-(A+D)e^{\lambda}+\left(AD-BC\right)\right)=0}$$

である。どの位置でも$r_s=r_0e^{\lambda s}$=0 となってしまう自明の解（光軸上を進む光）を避けるためには，$e^{2\lambda}-(A+D)e^{\lambda}+\left(AD-BC\right)=0$でなければならない。これが特性方程式である。

　ここでλが実数部をもつ（$\lambda=a+ik$）ときは，ｓの増加とともにｒの大きさが指数関数的に増加するか減少する場合を表し（$e^{\lambda s}=e^{as}\times e^{iks}$, $\left|e^{\lambda s}\right|=\left|e^{as}\right|\times\left|e^{iks}\right|=e^{as}\times 1,$），光が安定に伝播しない。λが純虚数のときは，$\lambda=ik$とおくと，$e^{iks}=\cos ks+i\sin ks$であって，光ビームの幅が振動しながら安定に伝播する（ビーム系の変化はどこまで行っても同じパターンの繰り返し）。複素数を使わずに，三角関数だけ使っても同じ状況を表現できる：差分方程式が線形だから複素指数関数の実部もしくは虚部だけ（三

角関数）を使って演算していても，複素数として計算しても同じ結論を得る。ここでは，複素形式を使う。

特性方程式は，条件 $AD-BC=1$（$\left|e^{\lambda}\right|=1$）のもとに

$$e^{2\lambda}-(A+D)e^{\lambda}+(AD-BC)=e^{2\lambda}-(A+D)e^{\lambda}+1=0$$

となる。$e^{\lambda}$ に対する 2 次方程式を解けば

$$e^{\lambda}=\frac{A+D}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^{2}}$$

である。

(4) $\left|A+D\right|>2$ の場合，上の式の平方根の中が負となり右辺は実数となる。このとき s を大きくすると光軸からの距離を表す「実数 $e^{\lambda}$」の冪乗（$\left(e^{\lambda}\right)^{s}$）は、発散する場合（$\lambda>0$）とゼロ（$\lambda<0$）に収束する場合があるが、いずれも安定した光の伝達にはならない。

一方、$\left|A+D\right|\le 2$ の場合には，$e^{\lambda}$ の実部の二乗と虚部の二乗の和をとるとわかるように，$\left|e^{\lambda}\right|=1$ となるので $e^{\lambda s}=e^{iks}=\cos ks+i\sin ks$ と書き直せる。これは，s を大きくしていっても光軸からの距離は一定値をこえることなく、ある距離を進んだ後にもとの状態にもどることを意味する。すなわち安定な伝達が行われる。

(5) $A+D=\dfrac{f_1f_2-2f_2d-df_1+d^2}{f_1f_2}+\dfrac{f_2-d}{f_2}=2-\dfrac{2d}{f_1}-\dfrac{2d}{f_2}+\dfrac{d^2}{f_1f_2}=\left(1-\dfrac{d}{2f_1}\right)\left(1-\dfrac{d}{2f_2}\right)\times 4-2$

$\left|A+D\right|\le 2\Rightarrow 0\le\left(1-\dfrac{d}{2f_1}\right)\left(1-\dfrac{d}{2f_2}\right)\le 1$ が安定な条件となる。

(6) 凹面鏡の焦点距離と曲率の間には $f=R/2$ の関係がある。従って

$$0\le\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)\le 1$$