問１

$$\varsigma = ae^{i(k_0x-\omega_0t)} + ae^{i(k_0+\Delta k)x-(\omega_0+\Delta\omega)t} = ae^{i(k_0x-\omega_0t)}\left[1+e^{i(\Delta k\cdot x-\Delta\omega\cdot t)}\right]$$

とすれば、搬送波（キャリアともいう．信号の搬送に用いられる基本の正弦波で，位相が高速に変化し信号の中心周波数になる）は最右辺の第１因子$e^{i(k_0x-\omega_0t)}$である。キャリアの位相速度は、位相項が一定の位置を追跡することで求まる。実際，たとえば位相が 0 の位置を追跡しよう：$e^{i(k_0x-\omega_0t)}$の指数関数の肩の部分(i = √(-1) を除いた部分)が位相であるから，

$$(k_0x-\omega_0t)=0$$

とおく。位相が 0 の位置は，時刻tに

$$x=\frac{\omega_0}{k_0}t$$

にある。したがって，位相 0 の位置は

$$v_0=\frac{\omega_0}{k_0}$$

で進行する．これが位相速度である。

次に群速度について．波形（振幅の空間的な変化の様子）の動きかたを考察する．振幅を表す関数は　$a\left[1+e^{i(\Delta k\cdot x-\Delta\omega\cdot t)}\right]$　である．　ある時刻 t，および位置 x での振幅の値は，時刻の変化に応じて位置も移動すれば，同じ値に保たれる．たとえば

$$x=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t+x_0$$

とおく（x_0は定数）と，

$$e^{\Delta k\cdot x-\Delta\omega\cdot t}=e^{\Delta k\cdot\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t+x_0\right)-\Delta\omega\cdot t}=e^{\Delta k\cdot x_0}$$

となる。すなわち振幅が

$$a\left[1+e^{i(\Delta k\cdot x_0)}\right]$$

一定に保たれる．すなわち$x=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}t+x_0$の関係で結ばれた$(t,x)$で観測すると振幅が一定になる。言いかえると，この関係を満たして移動する観測者は振幅波形が変化しないと見る。こうして，この問の「うなり」の場合に群速度が$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$であることが示された。

まとめると「$v_0=\dfrac{\omega_0}{k_0}$の位相速度を持つ波と，$v_0+\Delta v=\dfrac{\omega_0+\Delta\omega}{k_0+\Delta k}$の位相速度を持つ波とを重ね合わせるとき，信号波形の包絡線は$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$の速度で移動する。」

この問の波形は周期的であり単一パルスではないから「波束」のイメージとは異なる。信号波形に繰り返し構造がない一山の波形のとき（これが波束）には連続的に変化する周波数成分（あるいは同じことだが波数成分）が含まれている。この波束のキャリア波数がk_0のとき，k_0により近い波数成

分が，波束のより大きな構造（包絡線の細かい凹凸は無視した概形）を作り出すのに大きく寄与する。このことは，2 つの波のうなりをつくり，そのうなりの周期が大きいときには，２つの波は周期が接近していることを思い出せば納得できる。そうすると，波束の大づかみな形が移動する速度は，k_0 の波と，これに非常に近い $k_0+\mathrm{d}k$ を持つ波のうなりの波形が移動する速度で与えられることになる。よって $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}\to\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ を k_0 において計算すれば，それが波束の群速度を与える。

分散関係 $\omega(k)$ が与えられたとき，位相速度も波数の関数 $v(k)$ である。しかし常に $kv=\omega$ が成立つので，波束のキャリア k_0 における位相速度は $v_0=\left.\dfrac{\omega}{k}\right|_{k=k_0}$ である。また，群速度の一般式は

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\ kv\ =v+k\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k}$$

である。この値を k_0 において計算すれば波束の群速度が求まる。

問２

題意は，実験的に得た分散関係から（ここでは，波長が 1 ミクロンと 0.7 ミクロンの二点しか与えられていないので，ほんとうは少し無理があるが），この媒質を伝わる光パルスの群速度を求めることである。

一般に，分散関係は波数(k) v.s. 角周波数(ω)のグラフで描く事が多い。もし分散がなければ，グラフは $\omega=kv$ という直線になる。近赤外から可視光にかけては，紫外部にある吸収によって，波長が短くなると屈折率が増大し位相速度が低下する。原点と分散 $\omega(k)$ を表す曲線上の点（その点の k の値はキャリアの波数）を結ぶ直線の傾きが位相速度である．接線の傾き $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ が群速度を与える。

この問題では，波長と屈折率がデータとして与えられているから，それに適合する式変形を行なっておくと楽だろう：

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}(kv)}{\mathrm{d}k}=v+k\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k}=v-\lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$$

ただし，最後の等号には

$$k\lambda=2\pi$$

を用いた。（ある振動数の光は，どのような媒質を通過中であってもその振動数が一定に保たれ，波長や波数が屈折率により変化することに注意せよ。）

波長 1 ミクロンと，それから 300nm = 0.3 ミクロン離れた波長とで考えるので，その波長差を微分で表すことに疑問を感じるかもしれないが，線形近似の範囲だと思ってがまんする。短波長側に 0.3 ミクロンシフトするので

$\mathrm{d}\lambda=-0.3$ ミクロン

とく。

位相速度の変化 $\mathrm{d}v$ を求める．屈折率が異なる二つの波長では，異なる位相速度となり，その差は

$$\mathrm{d}v = \frac{c}{n+\mathrm{d}n} - \frac{c}{n} = \frac{c}{n}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{\mathrm{d}n}{n}} - 1\right) \approx \frac{c}{n}\cdot\left(\frac{-\mathrm{d}n}{n}\right)$$

である。ただし，n は 1 ミクロンでの屈折率（$n=1.5$）。c は真空中の光速度，$\mathrm{d}n$ は波長が 0.3 ミクロンだけ短くなったときに起きる屈折率変化（$\mathrm{d}n = 0.005 > 0$）である。短波長側で位相速度は遅くなる（$\mathrm{d}v < 0$)。波長が短くなると（$\mathrm{d}\lambda < 0$）位相速度が小さくなる（$\mathrm{d}v < 0$）だから，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} > 0$ である。符号に混乱を起こさぬよう，絶対値で示すと

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{c}{n}\cdot\left(\frac{|\mathrm{d}n|}{n|\mathrm{d}\lambda|}\right) = v\cdot\left(\frac{1}{n}\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|\right)$$

となる。

以上をまとめ，群速度と位相速度の関係式

$$v_g = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = v\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{n}\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|\right)$$

に必要な値を代入する。最右辺の( )内第２項を数値的に見積もると

$$\frac{1\mu\mathrm{m}}{1.5}\cdot\frac{0.005}{0.3\mu\mathrm{m}} \approx 0.01$$

すなわち 1%程度になる。従って，群速度は位相速度より１%程度遅いという結論になる。位相速度は $\approx \frac{3\times10^8}{1.5}$ m/s=2×10^8m/s である。

後半の問題では，光パルスが持つ周波数の広がりを考え，各周波数成分が異なる速度で媒質を一定距離だけ進行するときに，どれほどパルス幅がボケるかを考えるのが目的である。ここでいう速度は群速度である。1 つのパルスが非常に広い周波数帯域にまたがるとき，その帯域の各周波数をキャリアとするパルスが重なっていると考え，それらが異なる群速度で進行する（群速度分散がある）として解析する。

まず，与えられたパルスの周波数の広がりを求めよう。パルスが時間巾 T をもつなら最低でも $\mathrm{d}\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\times10^{12}$ rad/s 程度の周波数の広がりを持つ。その波長の広がりの相対値は，中心波長が 1 ミクロン($\omega = 2\pi\frac{c}{n\lambda} = 2\pi\times2\times10^{14}$ rad/s)ならば $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \frac{10^{12}}{2\times10^{14}} = 0.5\%$ 程度となる。(必要に応じてフーリエ解析を復習せよ。)

次に群速度分散の大きさを見積もる。$v_g = v\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{n}\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|\right)$ の右辺で分散を与える要素は，位相速度 v の分散と(　)内第２項の屈折率およびその微分である。しかし $1 \gg \frac{\lambda}{n}\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| \approx 0.01$ なので位相速度 v の波長依存性を見積もれば，群速度の分散特性がわかる。そこで位相速度の分散を検討する。波長が $\frac{0.3\mu\mathrm{m}}{1\mu\mathrm{m}}$=30%だけ相対変化したとき屈折率が $\frac{0.005}{1.5}$ だけ相対変化するという条件から，$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = 0.5\%$ の

幅 $\mathrm{d}\lambda$ に対して屈折率がほぼ $\dfrac{0.005}{1.5}\times\dfrac{0.5\%}{30\%}=5.6\times10^{-5}=\dfrac{6}{1000}\%$ だけ変化する。位相速度の相対変化は $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}=v\cdot\left(\dfrac{1}{n}\left|\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|\right)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=\dfrac{\mathrm{d}n}{n}$ より，同じく $\dfrac{6}{1000}\%$ 程度である。こうして，群速度もこの程度の相対変化があると考えられる。

屈折率 1.5 の媒質を 1m進むには $5\times10^{-9}\,\mathrm{s}$ 必要である。群速度の差による所要時間の差は $\left(5\times10^{-9}\,\mathrm{s}\right)\left(\dfrac{5}{1000}\%\right)=5\times10^{-9}\cdot5\times10^{-5}\,\mathrm{s}=2.5\times10^{-13}\,\mathrm{s}$ 程度となる。パルス幅 $10^{-12}\,\mathrm{s}$ の 25%程度「ぼけて」広がることになる。逆に，$10^{-12}\,\mathrm{s}$ より一桁短いパルス列を使ったのでは信号の分離が困難になる。

高速通信を長距離にわたって行う場合、媒質がもつ光損失(吸収や散乱)以外に、この屈折率分散をできるだけ小さい物質を選ぶ配慮が必要である（光導波路を多モードで使うと、この屈折率分散以外に、モードによる伝播速度の差が加わる）。また、超短光パルスを実験室内であつかうときも、用いる光学素子によっては光パルスの性質が著しく損なわれることがあるので、注意が必要である。一方、分散の傾向が逆の場合には、パルスの圧縮もありうるし、実際にそのような方法でパルス圧縮することがある。

問 3

光の進行方向と偏光方向（電場ベクトルの向き）とは直交しているので、垂直入射（出射）ではどちら向きの偏光であるかの区別がない。斜入射するときには、ｓとｐとで振幅反射率が異なるために、さまざまな現象が起きる。本問はその例であり，直線偏光から円偏光を作り出すデバイスである。

[本問には直接関係ないが、たとえばアスファルト道路の表面を夕日が照らしているような場合，斜めに入射する光は(アスファルトに限らず一般的な現象だが) p 偏光がより多く吸収されて、反射光には s 成分が多くなる。だから、s 成分をカットする方位をもつポラロイド(偏光)サングラスをかけると、道路表面からの反射が消えて他の物体が見やすくなる。]

全反射の場合には、反射波の位相が変化する（反射係数を複素数にして、その現象を表現している）が，その変化量がｓとｐで異なることから本問のデバイスが成立する。実際に計算をしよう。比屈折率 $n=1.52$ で入射角が $\theta=55.5^\circ=\dfrac{55.5}{180}\pi$ の場合の全反射では，各偏光の振幅反射率の計算から位相変化が

$$r_\mathrm{s}(\theta)=\frac{n\cos\theta+i\sqrt{n^2\sin^2\theta-1}}{n\cos\theta-i\sqrt{n^2\sin^2\theta-1}}\qquad\rightarrow\arg(r_\mathrm{s})=1.439$$

$$r_\mathrm{p}(\theta)=\frac{\cos\theta+i\cdot n\sqrt{n^2\sin^2\theta-1}}{\cos\theta-i\cdot n\sqrt{n^2\sin^2\theta-1}}\qquad\rightarrow\arg(r_\mathrm{p})=2.224$$

となる。図のように，フレネルロムを出るまでに 2 度全反射を経験するから，入射したｐおよびｓ偏光の位相差は

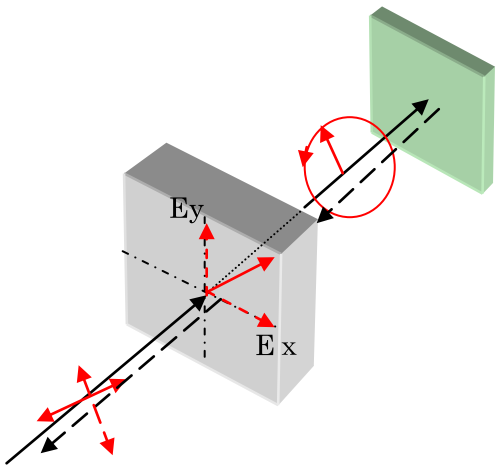
$$(2.224-1.439)\times2=1.57\approx\frac{\pi}{2}$$

となる。直交する 2 つの偏光を 90 度の位相差で合成すると円偏光となる。

1 回目の全反射を起こす界面に対する入射が，ｓとｐの強度が等しいような直線偏光であるとすれば、フレネルロムからの出射は円偏光になる。逆に円偏光を入れると直線偏光が現れる。(ｓとｐの強度が異なるとどうなるか考えよ)。

このような用途に用いるデバイスを 1/4 波長板という(この名称は，２つの偏光間に生じる位相差を波長の何分の 1 という言い方で表したもの，1/2 波長板というのも有名である)。通常は 1/4 波長板は，結晶の光学異方性を用いたものである。これは特定の厚さにカットした結晶を通過する各偏光の光学的距離に差ができることを用いる。したがって波長が変わると屈折率分散から位相差に対する条件がずれてしまう。(入射波が設計波長より長波長へシフトしたときだけは、傾けて使うなどすればなんとかなる)。フレネルロム(斜方体)は、全反射だけを使うので、屈折率分散の影響が小さく、波長依存のない波長板として有用である。

波長板の応用例として、たとえば、レーザーから出た直線偏光を 1 /4 波長板を通して円偏光にすると､その先で反射された後に再びこの波長板を通して戻ってくる光は 90 度異なる直線偏光となり、レーザー共振器内に注入されてももとの光と干渉せず発振を乱すことがない。



問 4

垂直入射の透過係数を計算する。

まず外部（空気あるいは真空）の屈折率を $n_1 = 1$，ガリウム砒素結晶内の屈折率を $n_2 = 3.6$ とすると，界面を通って結晶内部に進入する光の振幅反射係数と振幅透過係数は

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -0.565, \qquad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = 0.435$$

である。これをパワー（電場振幅の二乗に比例）反射率と透過率にすると

$$R = |r|^2 = 0.319, \qquad T = |t|^2 \frac{n_2}{n_1} = 0.681$$

である。パワー透過率の式にある因子 $\frac{n_2}{n_1}$ について説明しよう。

電場振幅で光電場のエネルギー密度を表すと，媒質の誘電率を ε として

$$u_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon |E|^2$$

である。誘電率と屈折率は $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ の関係にあるが，非磁性体の（すなわち通常の）誘電体では透磁率は真空中のそれと等しいとおいて差し支えない。すなわち $\mu = \mu_0$。この電場のエネルギーが光の速度 $v = \frac{c}{n}$ で進行するから，媒質 n_2 の中で（パワー透過率で用いる）光パワーは

$$I_2 = v_2 u_{\mathrm{E}} = \frac{c}{n_2}\varepsilon_2 |E_2|^2 = c\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}}|E_2|^2 = c\frac{n_2}{\mu_0}|E_2|^2$$

となる。こうして，パワー透過率すなわち界面を通過する前後のパワーの比は

$$T = \frac{I_2}{I_1} = \frac{c\frac{n_2}{\mu_0}|E_2|^2}{c\frac{n_1}{\mu_0}|E_1|^2} = \frac{n_2}{n_1}\frac{|E_2|^2}{|E_1|^2} = \frac{n_2}{n_1}|t|^2$$

となる。簡単に言えば，屈折率の大きなところは光の速さが遅いためにパワー密度が上がる。

次は結晶内部から外部に出力する場合である。上の議論で添え字 1 と 2 の役割を交換すればよい。$n_1 = 3.6, n_2 = 1$ とおいて $r = 0.565, t = 1.565, R = |r|^2 = 0.319, T = \frac{n_2}{n_1}|t|^2 = 0.681$ となっている。パワーの透過率や反射率を見ると双方向の相対性が成立ち物理的に納得できるだろう。それにひきかえ，振幅透過率が 1 より大きいのは不思議に感じるかもしれない。

以上の考察をもとに、大気中からガリウム砒素のへき開面を通して、68%の光エネルギーが垂直入射する。逆に、内部からも 68%の光が外部に出て行く。外部に射出された光が 1mW なら、出る前には $\frac{1\mathrm{mW}}{0.68} = 1.47\mathrm{mW}$ である。