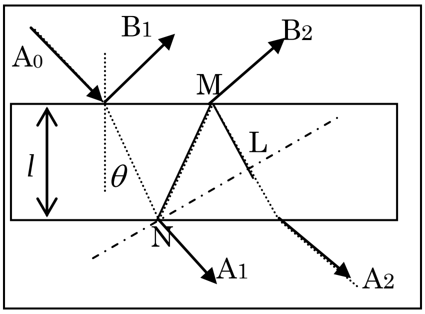
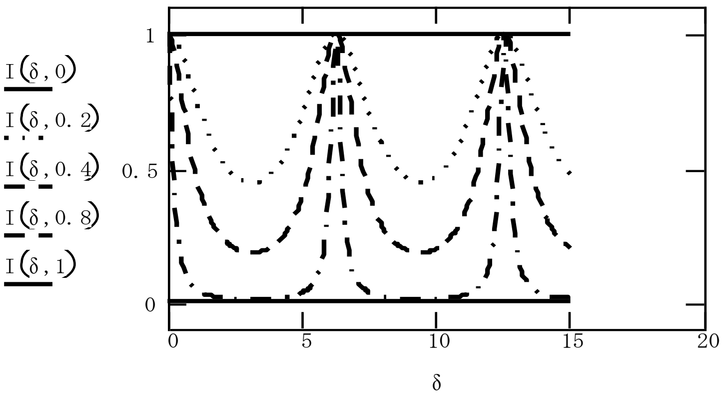
問 1



- $\delta=\dfrac{4\pi n l\cos\theta}{\lambda}$ は、媒質中の「隣どうし」の光線の位相差である：右図で、波面 NL を作る 2 つの光路の差は、$\delta L=LM+MN=l\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}+\dfrac{l}{\cos\theta}=2l\cos\theta$ であり、位相差として表すと $\delta=\dfrac{2\pi(\delta L)n}{\lambda}$ である。
- 反射を順次追いかける：入射振幅が $A_0, B_1=r\,A_0, B_2=t'r't\,A_0\,e^{i\delta}, B_3=t'r'^3\,t\,A_0\,e^{2i\delta}$ などとなる。
- 全部集めると $A_r=\left\{r+tt'r'e^{i\delta}\left(1+r'^2e^{i\delta}+\left(r'^2e^{i\delta}\right)^2+\cdots\right)\right\}A_0$
- $r'=-r$ がいつでも成立する(3 章の式を見よ)。垂直入射のときからも分かるように、$r^2+tt'=1$ であるが、これは一般の入射角でもなりたつ：1 枚の界面については、媒質の上面から反射されるパワーは r² に、下面から透過してくるパワーは tt’に比例する。つまり、損失がなくエネルギー保存が成り立つというのが、この式である。
- $R=r^2=r'^2$ とすると、$A_r=\dfrac{\left(1-e^{i\delta}\right)\sqrt{R}}{1-Re^{i\delta}}A_0$ になる。
- $T=tt'$ とすると、同じく、$A_t=tt'\left(1+r'^2\,e^{i\delta}+r'^4\,e^{2i\delta}+\cdots\right)A_0=\dfrac{T}{1-Re^{i\delta}}A_0$ である。
- このエタロンのパワー反射率は $\dfrac{I_r}{I_0}=\dfrac{|A_r|^2}{|A_0|^2}=\dfrac{4R\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}$ である。
- 求めるパワー透過率は、$\dfrac{I_t}{I_0}=\dfrac{|A_t|^2}{|A_0|^2}=\dfrac{(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}$ である。



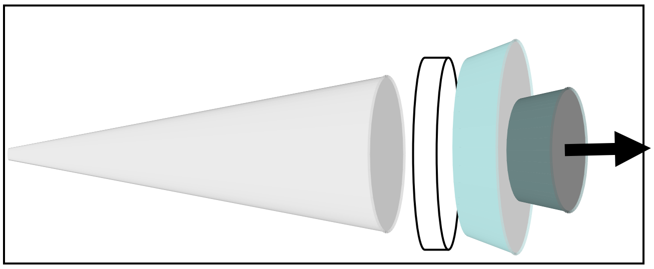
- 図は、上から順に R ＝ 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0 の数値例。(縦軸は透過率、横軸は位相変化)
- 波長を掃引すると、δが変化する。これを周波数軸上で表すと、等間隔の透過ピークが現れる。波長は周波数の逆数だが、狭い範囲の掃引なら、波長軸上でも近似的に等間隔のピークになる。

問 2

問 1 と同様の議論をする。透過のピークについては、$\delta=0$ とすれば十分だから

$A_t = att'\left(1+a^2r'^2+a^4r'^4+\cdots\right)A_0 = \dfrac{aT}{1-a^2R}A_0$ だから、$\underline{\dfrac{I_t}{I_0}=\dfrac{\Gamma T^2}{(1-\Gamma R)^2}=\dfrac{\Gamma(1-R)^2}{(1-\Gamma R)^2}}$ となり、ピーク値が下がる。では、透過スペクトルの幅はどうなるだろうか？反射率が高いと共振器内に光エネルギーがとどまる時間が増すため、Q 値が増す。逆に、反射率が低いと Q 値が下がる。共振器内の光エネルギーの減衰が激しいとき、そのプロセスのいかんによらず、Q 値が下がる。従って、共鳴線幅が広がる。

放射状に広がる単色光(つまり、いろいろな角度で入射させる)に対して、FP エタロンからの透過光は，どんなパターンで出射するだろうか？もし、単色ではなく、2 色だったら？　参考：「透過して出てきた異なる周波数の光が重ならない、互いに邪魔しない」という意味で、ピークの間隔を周波数で表し、これを free spectral range（FSR）と言う。



問 3

半波長 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda}{n}$ (n:屈折率)で共振器長 L を割ると、定在波の「腹」の数が得られる。結晶内の波長は、1.5/3＝0.5μm 程度だから、2 x 300/0.5＝1200 個程度の「腹」があることになる。これは垂直入射における $\delta=\dfrac{4\pi nl\cos\theta}{\lambda}=\dfrac{2\pi\cdot 2\times 3\cdot 300\cdot 1}{1.5}=2\pi\times 1200$ の値をもとめたことに他ならない。

となりあう縦モードの間隔を周波数軸上で求める：真空中の光速度を c とすると、$\Delta\nu=\dfrac{c/n}{2L}$ が間隔になる。これがこの共振器の FSR であるり，その概算の値は（$3\text{x}10^8/3$）/(2・$300\text{x}10^{-6}$)=$1.7\text{x}10^{11}$(1/s) =170GHz である。

半導体レーザーで通常の励起をしたとき、利得スペクトルの幅は、(光子のエネルギーで表して）数 meV 程度が普通である。レーザー発振したとき光子のエネルギーが 1 eV(真空中の波長が 1.3μだとすると、これが丁度 1eV で、振動数にすれば 2.4 x 10^{14}Hz といったところ)付近だから、利得のバンド幅は 10^{11}Hz の数倍程度となり、この中に数本の縦モードが入る。

レーザー発振が起きると、利得スペクトと縦モードの両方を考慮して最も発振しやすいところが発振する。しかし、「複数の縦モードの間で発振のしやすさに甲乙つけがたいという」という状況になると、多モードで発振する。一般的には、このときに大きな強度雑音が発生する。

単一軸モードで発振させるために、波長を選択するような構造を導入することもある。単一モードで発振する半導体レーザーの周波数を変えるには、ひとつは温度制御で熱膨張により共振器長を変えるやりかた、もうひとつには注入電流密度を変えて内部の電子・正孔密度を変える(吸収・利得スペクトルを変え、それが屈折率を変えることにつながる)方法がある。逆に、温度や注入電流を適切な方法で制御しないと発振波長が安定しない原因となる。

問 4

光子とは，光の素粒子のことである．光（電磁波）の強度は，単位時間あたり，単位面積あたりのエネルギーである．強度を連続的に変化させることができるというのが古典電磁気学の仮定であり，日常的な経験ではそのとおりに思われ，マクスウェル方程式はその仮定に基づいて構成される．しかし，強度の変化は不連続となる．ある時間内にある面積に到達する光のエネルギーが，ある量（周波数ωの光では$\hbar\omega$，$\hbar$：プランク定数）の整数倍となる．感度の高い検出器を用意し，光の強度を弱めると「離散的＝整数倍」な変化を確かめることができる．また波長が短い（周波数が高い）光すなわち紫外線，X線やガンマ線では，光電効果を通して容易に光のエネルギーの離散性を確認できる．周波数ωの光は，1個が$\hbar\omega$のエネルギーをもつ光子からなると考えると，光や光と物質の相互作用を矛盾無く説明できる．1個の光子は質量が0，真空中で速度cで進み，$\hbar k = h/\lambda$の運動量をもつ．円偏光の光子は$\pm\hbar$の角運動量をもつ．

古典的な電磁場のエネルギー密度は$u = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + 1/\mu B^2)$だが，このEとBが周波数$\omega$の電磁波の電磁場であれば，単位体積あたり　$u/(\hbar\omega)$個の光子があって，これが速度cで進行すると考える．簡単に言えば，光子の存在確率を表す波動関数が電磁場である．電磁場が干渉してできた「最終的な電磁場」にしたがって光子の存在を確率的に計算できる．

共振器に光を注入するときは，したがって，共振器に光子を注入すると考えて良い．共振器内の光子は，共振器内に物質があればそれに吸収されて消滅することもある．鏡面にあたると，鏡の透過率から定まる確率で鏡を通過する．透過しなかった光子は反射される（吸収され，つぎに放出される）か，鏡の物質に吸収される．

問2では共振器のQ値を用いて説明した。共振条件をみたし共鳴しているときには、共振器内に光子が長時間閉じ込められるとも言える。(一旦共振器に入ってしまうと反射を非常に多くの回数繰り返しなかなか出て行かない。共振器からわずかに漏れ出した光（0回反射したあとの光, 1回反射したあとの光，2回,...）が干渉して大きな透過強度を作り出す。入射光強度が長時間にわたって持続するとき，共振器が共鳴状態なら、外に漏れ出す光は過去に入射されたものも混じっている、という言い方もできる。

まず、両鏡面からの「もれ出し」だけが共振器内の光が失われる理由であるときを考える（共振器内の媒質や鏡をつくる物質による吸収，散乱などがないとする)。両鏡面が同じパワー反射率 R をもつとする。共振器内を進む光が一度鏡にあたると，共振機内の光のエネルギーは失われ，その損失率が（$1-R$）である。この損失は，光子(あるいは光のエネルギーと言っても良い)が共振器内を片道走る時間すなわち$t_0 = \dfrac{nL}{c}$の間に一度生じる。

一度の損失が非常に小さければ，共振器内の光のエネルギーは時間の経過に対して指数関数的に減衰するだろう。すなわち微分方程式

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\tau'}E$$

で記述されるはずである。その意味は，上の式を

$$dE = -\frac{dt}{\tau'}E$$

と書き直して見るとわかる。ある特徴的な時間τ'（寿命と呼ばれる）に比べて十分短い時間dtをとると，その間に減衰する光の量dEは（損失がつねに元の量の何パーセントというふうにして起きるから）Eに比例し，さらにdtにも比例するとしてよい。この微分方程式の解は

$$E(t) = E(0)e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

である。

ここで$dt = t_0$とおいて微分方程式と見比べると

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{(1-R)E}{t_0} = -\frac{E}{\tau'}$$

だから

$$\tau' = \frac{1}{(1-R)}t_0 = \frac{nL}{c\ 1-R}$$

となる。これが光子の寿命である。

さらに、散乱や吸収あるいは反射ロス以外の原因で，もし片道当たりでaというパワーロスがあれば、その損失過程だけによって生じる寿命は

$$\tau'' = \frac{nL}{ca}$$

である。この過程と、上で見た共振器からの反射損失が独立な確率過程として起きるのだから、共振器内の光子の寿命は、各消滅確率(寿命の逆数)の和の逆数となる。結局、

$$\tau = \left(1/\tau' + 1/\tau''\right)^{-1} = \frac{nL}{c\left(a + (1-R)\right)}$$

を得る。

たとえば、半導体レーザーの場合、典型的な値として n=3.5、R=0.3 程度を用いて計算しようとすると、実は上の式はそのままでは使えない。理由は、R が小さすぎるために、「共振器 1 往復あたりの時間を用いて微分方程式を立てた」近似が悪くなるからである。このときは、「微小距離すすむ間に少しずつ反射が起きて、片道分でみると積分の結果 R の反射が起きていた」ように思わないと、微分方程式に鏡面反射がとりこめない。また、損失は単位距離当たりαだとして、

$$\tau = \frac{n}{c\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln R\right)}$$

とするのが妥当になる。ともかく、L=300μとおくと、$-\frac{\ln R}{L} \approx 40$ (1/cm)程度になる。αやその他の損失はこの数分の 1 程度となっていて、ほとんど共振器からの漏れ出しにより寿命が決まるのが半導体レーザーの特徴である。$\tau \approx \frac{3.5}{3\times10^{10}\cdot 40} \approx 3$ps 程度となる。